Материалы для проведения заключительного этапа

XLII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2015–2016 учебный год

Второй день

Санкт-Петербург, 21–29 апреля 2016 г.

Москва, 2016

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, А. А. Гаврилюк, А. А. Гайфуллин, Н. А. Гладков, А. С. Голованов, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Л. А. Емельянов, Г. К. Жуков, А. П. Зимин, Е. Ю. Иванова, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, П. В. Мартынов, А. Д. Матушкин, В. В. Мокин, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, В. А. Омельяненко, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, И. А. Решетников, И. С. Рубанов, Р. Р. Садыков, М. Б. Скопенков, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Н. В. Чернега, К. В. Чувилин, О. И. Южаков, А. Г. Якубов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензенты: д. ф.-м. н. Р. Н. Карасёв, к. ф.-м. н. Б. В. Трушин.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, К. В. Чувилин.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Запрещается публикация или размещение в сети Интернет условий или решений задач олимпиады.

Условия и решения задач

9 класс

9.5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел?

(*Н. Агаханов*)

Ответ. На 8 нулей.

Решение. Покажем, что сумма не может оканчиваться на 9 нулей. Каждое из составленных чисел делится на 9, поскольку сумма его цифр делится на 9. Поэтому их сумма также делится на 9. Наименьшее натуральное число, делящееся на 9 и оканчивающееся на девять нулей, равно $9 \cdot 10^9$, так что сумма наших чисел не меньше $9 \cdot 10^9$. Значит, одно из них не меньше 10^9, что невозможно.

Осталось показать, как составить числа, сумма которых оканчивается на восемь нулей. Например, можно взять восемь чисел, равных 987654321, и одно число 198765432. Их сумма равна $81 \cdot 10^8$.

9.6. Квадрат разбит на $n^2 \geqslant 4$ прямоугольников $2(n-1)$ прямыми, из которых $n-1$ параллельны одной стороне квадрата, а остальные $n-1$ — другой. Докажите, что можно выбрать $2n$ прямоугольников разбиения таким образом, что для любых двух выбранных прямоугольников один из них можно поместить в другой (возможно, предварительно повернув). (*С. Берлов*)

Решение. Назовём пару прямоугольников *вложимой*, если один из них можно вложить в другой.

Пусть горизонтальная сторона квадрата разбилась на отрезки длин $a_1, \ldots, a_n$ (слева направо), а вертикальная — на отрезки длин $b_1, \ldots, b_n$ (сверху вниз). Переставив «столбцы» и «строки», можно считать, что $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Обозначим через $Q_{i,j}$ прямоугольник разбиения со сторонами a_i и b_j. Заметим, что при $i \leqslant k$ и $j \leqslant \ell$ пара $Q_{i,j}$ и $Q_{k,\ell}$ вложима.

Поскольку $a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n$, найдутся различные индексы i и j такие, что $a_i \geqslant b_i$ и $a_j \leqslant b_j$. Можно считать, что $i < j$. Тогда существует индекс $k \in [i, j]$ такой, что $a_k \leqslant b_k$ и $a_{k-1} \geqslant b_{k-1}$.

Мы утверждаем, что можно выбрать следующие прямоугольники: $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$, $\ldots$, $Q_{1,k-1}$, $Q_{2,k-1}$, $\ldots$, $Q_{k,k-1}$, вкупе с $Q_{k-1,k}$, $Q_{k,k}$, $\ldots$, $Q_{k,n}$, $Q_{k+1,n}$, $\ldots$, $Q_{n,n}$ (см. рис. 1). Их количество равно $2(k-1)+2(n-k+1) = 2n$. Любая пара из них, кроме $(Q_{k,k-1}, Q_{k-1,k})$, вложима по замечанию выше. Наконец, оставшаяся пара также вложима, поскольку $a_k \leqslant b_k$ и $b_{k-1} \leqslant a_{k-1}$ (для вложения один прямоугольник нужно повернуть на 90°).

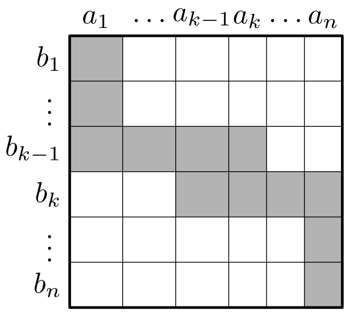

Рис. 1

9.7. Окружность ω вписана в треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Вневписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке A'. Точка X выбирается на отрезке $A'A$ так, что отрезок $A'X$ не пересекает ω. Касательные, проведённые из X к ω, пересекают отрезок BC в точках Y и Z. Докажите, что сумма $XY + XZ$ не зависит от выбора точки X.

(*И. Митрофанов*)

Решение. Будем считать, что точка Y лежит ближе к точке B, нежели Z; кроме того, считаем, что сторона BC горизонтальна, а A лежит выше неё (см. рис. 2).

Обозначим через ω_A вневписанную окружность треугольника ABC, касающуюся стороны BC, а через ω' — вневписанную окружность треугольника XYZ, касающуюся стороны XZ. Пусть ω касается BC в точке A''. Обозначим через T точку пересечения AA' и ω, лежащую ближе к A. Гомотетия с центром A, переводящая ω в ω_A, переводит T в A'; значит, касательная к ω в T параллельна BC.

Поскольку окружности ω и ω' вписаны в вертикальные углы, образованные прямыми XY и XZ, существует гомотетия с центром в X (и отрицательным коэффициентом), переводящая ω в ω'. Пусть при этой гомотетии точка T переходит в точку T'. Тогда T' лежит на прямой AA', касательная к ω' в T' параллель-

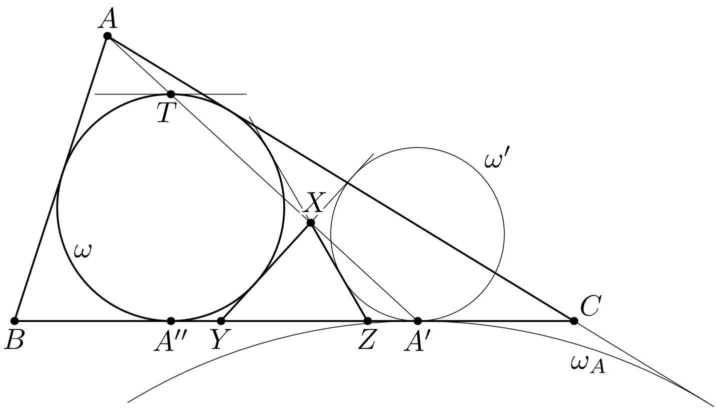

Рис. 2

на BC, и ω' лежит выше этой касательной. Такая касательная к ω' — это прямая BC; значит, T' лежит на BC, то есть ω' касается BC в точке A'.

Обозначим полупериметр треугольника XYZ через p. Так как окружности ω и ω' — вневписанные для этого треугольника, имеем $ZA' = YA'' = p - YZ$. Значит,

$$XY+XZ = 2p-YZ = 2(p-YZ)+YZ = ZA'+YZ+YA'' = A'A'',$$

что не зависит от выбора точки X.

Замечание. Тот факт, что ω' касается BC в точке A', можно также доказать, применив теорему о трёх гомотетиях к окружностям ω, ω_A и ω'. Центры гомотетий, переводящих их друг в друга, есть A, X и некоторая точка Q, лежащая на BC (так как BC — внутренняя общая касательная к ω_A и ω'). Получаем, что Q лежит на прямой AX, то есть совпадает с A'. Поскольку ω_A касается BC в $Q = A'$, то и ω' также касается BC в этой же точке.

9.8. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}\,.$$

(*А. Храбров*)

Решение. Домножив доказываемое неравенство на $a^2b^2c^2d^2$, получим

$$a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leqslant 1. \qquad (*)$$

Поскольку неравенство симметричное, можно считать, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$. По неравенству о средних для чисел a, b и $(c+d)$ имеем

$$ab(c+d) \leqslant \left(\frac{a+b+(c+d)}{3}\right)^3 = 1.$$

Следовательно, $a^2b^2(c+d)^2 \leqslant 1$.

Значит, для доказательства $(*)$ достаточно показать, что

$$a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leqslant a^2b^2(c+d)^2.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых остаётся неравенство

$$a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leqslant 2a^2b^2cd,$$

которое является суммой двух очевидных неравенств $a^2c^2d^2 \leqslant a^2b^2cd$ и $b^2c^2d^2 \leqslant a^2b^2cd$.

Замечание. Если допустить неотрицательные значения переменных, то в неравенстве $(*)$ равенство достигается лишь тогда, когда три числа равны 1 и одно равно 0.

10 класс

10.5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел? (*Н. Агаханов*)

Ответ. На 8 нулей.

Решение. Покажем, что сумма не может оканчиваться на 9 нулей. Каждое из составленных чисел делится на 9, поскольку сумма его цифр делится на 9. Поэтому их сумма также делится на 9. Наименьшее натуральное число, делящееся на 9 и оканчивающееся на девять нулей, равно $9 \cdot 10^9$, так что сумма наших чисел не меньше $9 \cdot 10^9$. Значит, одно из них не меньше 10^9, что невозможно.

Осталось показать, как составить числа, сумма которых оканчивается на восемь нулей. Например, можно взять восемь чисел, равных 987654321, и одно число 198765432. Их сумма равна $81 \cdot 10^8$.

10.6. Квадрат разбит на $n^2 \geqslant 4$ прямоугольников $2(n-1)$ прямыми, из которых $n-1$ параллельны одной стороне квадрата, а остальные

$n-1$ — другой. Докажите, что можно выбрать $2n$ прямоугольников разбиения таким образом, что для любых двух выбранных прямоугольников один из них можно поместить в другой (возможно, предварительно повернув). (*С. Берлов*)

Решение. Назовём пару прямоугольников *вложимой*, если один из них можно вложить в другой.

Пусть горизонтальная сторона квадрата разбилась на отрезки длин $a_1, \ldots, a_n$ (слева направо), а вертикальная — на отрезки длин $b_1, \ldots, b_n$ (сверху вниз). Переставив «столбцы» и «строки», можно считать, что $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Обозначим через $Q_{i,j}$ прямоугольник разбиения со сторонами a_i и b_j. Заметим, что при $i \leqslant k$ и $j \leqslant \ell$ пара $Q_{i,j}$ и $Q_{k,\ell}$ вложима.

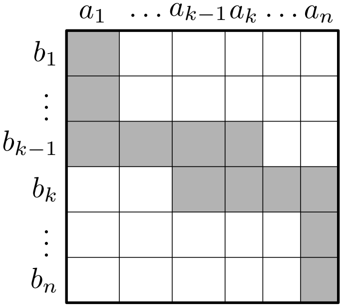

Рис. 3

Поскольку $a_1+\ldots+a_n = b_1+{}$ $+\ldots+b_n$, найдутся различные индексы i и j такие, что $a_i \geqslant b_i$ и $a_j \leqslant b_j$. Можно считать, что $i < j$. Тогда существует индекс $k \in [i,j]$ такой, что $a_k \leqslant b_k$ и $a_{k-1} \geqslant b_{k-1}$.

Мы утверждаем, что можно выбрать следующие прямоугольники: $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$, $\ldots$, $Q_{1,k-1}$, $Q_{2,k-1}$, $\ldots$, $Q_{k,k-1}$, вкупе с $Q_{k-1,k}$, $Q_{k,k}$, $\ldots$, $Q_{k,n}$, $Q_{k+1,n}$, $\ldots$, $Q_{n,n}$ (см. рис. 3). Их количество равно $2(k-1)+2(n-k+1) = 2n$. Любая пара из них, кроме $(Q_{k,k-1}, Q_{k-1,k})$, вложима по замечанию выше. Наконец, оставшаяся пара также вложима, поскольку $a_k \leqslant b_k$ и $b_{k-1} \leqslant a_{k-1}$ (для вложения один прямоугольник нужно повернуть на $90°$).

10.7. На доске написаны четыре попарно различных целых числа, модуль каждого из которых больше миллиона. Известно, что не существует натурального числа, большего 1, на которое бы делилось каждое из четырех написанных чисел. Петя записал в тетрадку шесть попарных сумм этих чисел, разбил эти шесть сумм на три пары и перемножил числа в каждой паре. Могли ли все три произведения оказаться равными? (*И. Богданов*)

Ответ. Да, могли.

Первое решение. Подходят, например, числа

$$x = N^2 - 3N + 1, \qquad y = N^2 - N + 1,$$
$$z = -3N^2 + 3N - 1, \qquad t = N^2 + N - 1,$$

где N — натуральное число, большее миллиона.

Нетрудно видеть, что эти числа также больше миллиона по модулю и попарно различны. Их попарными суммами являются числа

$$x + y = 2(N-1)^2, \quad x + z = -2N^2, \quad y + z = -2N(N-1),$$
$$z + t = -2(N-1)^2, \quad y + t = 2N^2, \quad x + t = 2N(N-1),$$

и они разбиваются на три группы с равными произведениями:

$$(x+y)(x+z) = (y+t)(z+t) = (x+t)(y+z) = -4N^2(N-1)^2.$$

Осталось проверить, что числа x, y, z, t взаимно просты в совокупности. Если у них есть общий натуральный делитель d, то d также делит $x + y = 2(N-1)^2$ и $y + t = 2N^2$; значит, $d \leqslant \text{НОД}(2N^2, 2(N-1)^2) = 2$. Случай $d = 2$ невозможен, поскольку $y = N(N-1) + 1$ нечётно. Итак, $d = 1$, что и требовалось.

Замечание 1. Этот пример является частным случаем следующего, более общего. Выберем два взаимно простых числа m и n и потребуем, чтобы попарные суммы исходных шести чисел были равны $\pm 2mn$, $\pm 2m^2$ и $\pm 2n^2$. Эта шестёрка чисел хороша тем, что она разбивается на три пары чисел с равными (нулевыми) суммами, а также на другие три пары чисел с равными произведениями: $2mn \cdot (-2mn) = 2m^2 \cdot (-2n^2) = 2n^2 \cdot (-2m^2)$. Заметим, что каждая шестёрка целых чисел, обладающая первым свойством, является шестёркой попарных сумм каких-то четырёх (рациональных) чисел.

В решении использованы значения $m + 1 = n = N$. Подробнее о том, как найти этот пример, см. в замечании 3.

Второе решение. Идеологически другой пример получается, если положить

$$x = N^3 - N^2 + 1, \qquad y = N^3 - 3N^2 + 2N - 1,$$
$$z = -N^3 + N^2 - 2N + 1, \qquad t = -N^3 + N^2 + 2N - 1,$$

где N — натуральное число, большее миллиона. Опять же, эти числа больше миллиона по модулю и попарно различны. Их попарными суммами являются числа

$$x+y=2N(N-1)^2,\quad x+z=-2(N-1),\quad y+z=-2N^2,$$
$$z+t=-2N^2(N-1),\quad y+t=-2(N-1)^2,\quad x+t=2N,$$

и они разбиваются на три группы с равными произведениями:

$$(x+y)(x+t)=(x+z)(z+t)=(y+z)(y+t)=4N^2(N-1)^2.$$

Проверка их совокупной взаимной простоты проводится аналогично такой же проверке в предыдущем решении.

Замечание 2. Этот пример также является частным случаем более общего. В нём попарными суммами четырёх исходных чисел являются числа $2ab^2$, $2a^2b$, $2bc^2$, $2b^2c$, $2ca^2$ и $2c^2a$, где a, b, c — попарно взаимно простые целые числа с нулевой суммой. Свойства этой шестёрки такие же, как и у шестёрки из прошлого решения (для проверки равенства сумм достаточно заметить, что $2ab^2+2a^2b=2(a+b)ab=-2abc$; другие подобные суммы также равны $-2abc$).

В решении использованы значения $a=N$, $b=1-N$, $c=-1$.

Замечание 3. Опишем метод поиска четвёрок *рациональных* чисел, удовлетворяющих требованиям задачи. (Из таких четвёрок можно получить требуемые четвёрки умножением на НОК знаменателей и делением на НОД числителей.)

Для начала перейдём (как и в предыдущих замечаниях) к поиску *шестёрок попарных сумм* наших трёх чисел. Единственным существенным условием на такую шестёрку является то, что она разбивается на три пары чисел с равными суммами: $(x+y)+(z+t)=(x+z)+(y+t)=(x+t)+(y+z)$. Действительно, если числа $n_1,\ldots,n_6$ таковы, что $n_i+n_{7-i}=s$ при всех $i=1,2,3$, то числами, дающими эти попарные суммы, являются, например, $\frac{n_1+n_2-n_3}{2}$, $\frac{n_1+n_3-n_2}{2}$, $\frac{n_2+n_3-n_1}{2}$, $s-\frac{n_1+n_2+n_3}{2}$ (есть и ещё *одна* четвёрка с такими же попарными суммами — какая?).

Итак, от нас требуется найти шестёрку чисел вида p, q, r, $s-p$, $s-q$, $s-r$ такую, что её элементы разбиваются на три пары чисел с равными произведениями. При этом числа шестёрки должны быть различными, кроме, разве что, совпадения чисел в одной паре вида $(t,s-t)$ (иначе два из исходных четырёх чисел также совпадут). Есть три существенно различных способа осуществить такое разбиение.

1) Пусть $p(s-p)=q(s-q)=r(s-r)=\alpha$. Тогда числа p, q и r являются тремя различными корнями квадратного (относительно u) уравнения $u^2-su+\alpha=0$, что невозможно.

2) Пусть $p(s-q)=q(s-p)=r(s-r)=\alpha$. Тогда $ps=qs$, что, в силу $p\neq q$, возможно лишь при $s=0$. Итого, наши шесть сумм есть $\pm p$, $\pm q$, $\pm r$; при этом они должны разбиваться на пары с равными произведениями. Это легко приводит к примеру из замечания 1.

3) Пусть $p(s-q)=q(s-r)=r(s-p)$. Тогда $0=p(s-q)-q(s-r)=s(p-q)-q(p-r)$, то есть $\frac{s}{q}=\frac{p-r}{p-q}$. Аналогично, $\frac{s}{p}=\frac{r-q}{r-p}$ и $\frac{s}{r}=\frac{q-p}{q-r}$. Перемножая эти три равенства, получаем $s^3=-pqr$. Исследуя эти уравнения далее, можно придти к примеру из замечания 2.

10.8. Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором $AC<BC$; пусть M — середина отрезка AB. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC'. Прямая CM пересекает прямые AC' и BC' в точках K и L соответственно. Пусть перпендикуляр к прямой AC', проведенный через точку K, перпендикуляр к прямой BC', проведенный через точку L, и прямая AB образуют треугольник Δ. Докажите, что окружность, описанная около треугольника Δ, касается окружности Ω.

(*М. Кунгожин*)

Первое решение. Пусть данные перпендикуляры, проходящие через K и L, пересекают AB в точках U и V соответственно и пересекаются в точке E. Заметим сразу, что обе прямые AC и KE перпендикулярны прямой AC', так что $AC\parallel KE$; аналогично, $BC\parallel LE$. Обозначим через ω окружность, описанную около треугольника EUV. Пусть прямая $C'E$ вторично пересекает окружность Ω в точке X (см. рис. 4). Мы докажем, что X — искомая точка касания окружностей ω и Ω.

Поскольку $\angle C'KE=\angle C'LE=90^\circ$, четырёхугольник $C'KEL$ вписан. Отсюда имеем $\angle ACX=\angle AC'X=\angle KLE=\angle LCB$, то есть $\angle ACX=\angle MCB$ и $\angle BCX=\angle MCA$. Это значит, что прямая CX — *симедиана*

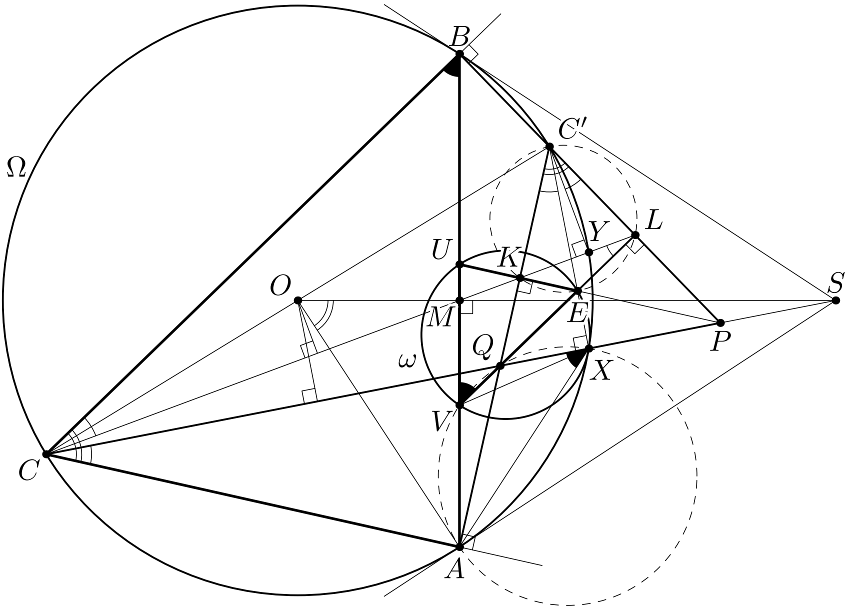

Рис. 4

треугольника ABC; как известно, она проходит через точку S пересечения касательных к Ω в точках A и B.

Пусть O — центр Ω; обозначим $\gamma = \angle ACB$. Пусть CM вторично пересекает Ω в точке Y. Так как AM — высота в прямоугольном треугольнике OAS, имеем $OM \cdot OS = OA^2 = OC^2$; это значит, что треугольники OMC и OCS подобны. Значит, отношение их высот, опущенных из O, равно $\frac{OM}{OC} = \frac{OM}{OA} = \cos\gamma$. Эти высоты являются средними линиями в прямоугольных треугольниках CYC' и CXC', так что $\frac{C'Y}{C'X} = \cos\gamma$.

Пусть прямые AC' и BC' пересекают CX в точках Q и P соответственно. Заметим, что $\angle PC'Q = \angle ACB = \gamma$. Кроме того, $\angle YC'L = \angle YCB = \angle QC'X$, так что прямоугольные треугольники $YC'L$ и $XC'Q$ подобны. Значит, $\frac{C'L}{C'Q} = \frac{C'Y}{C'X} = \cos\gamma = \cos\angle PC'Q$. Отсюда следует, что QL — высота треугольника PCQ. Итак, точки L, E, Q и V лежат на одной прямой.

Поскольку $\angle QVB = \angle VBC = \angle AXC$, четырехугольник $AVQX$ вписан в некоторую окружность. Поскольку $\angle EKQ =$

$= \angle EXQ = 90^\circ$, точки X, E, K и Q также лежат на одной окружности. Из этих двух окружностей получаем $\angle UEX = \angle KEX = \angle AQX = \angle AVX$, то есть точки U, V, E и X лежат на одной окружности ω. Кроме того, $\angle EVX = \angle QAX = \angle C'AX$. Это означает, что градусные меры дуг $C'X$ и EX окружностей Ω и ω равны. Значит, касательные к этим окружностям, проведенные в точке X, совпадают. Тем самым, окружности Ω и ω касаются.

Замечание 1. Догадаться до того, что окружности ω и Ω должны касаться именно в точке X, не очень сложно. Если эти окружности касаются, то точка касания является центром гомотетии, переводящей ω в Ω. Эта гомотетия должна переводить треугольник EUV в треугольник $A'B'C'$, симметричный ABC относительно O; значит, точка касания должна лежать на $C'E$.

Замечание 2. Есть несколько других способов показать, что прямые CX, AC' и EL пересекаются в одной точке (Q) — к примеру, с использованием понятия гармоничности. Напомним, что четвёрка точек (A, B, C, D), лежащих на одной прямой или одной окружности, называется *гармонической*, если $\frac{AB}{AD} \cdot \frac{CD}{CB} = 1$; четвёрка прямых, проходящих через одну точку, *гармоническая*, если четвёрка точек, высекаемая ими на прямой, такова.

Поскольку X — точка пересечения симедианы с описанной окружностью, как известно, четвёрка (C, A, X, B) гармоническая (это следует из подобий $\triangle ACX \sim \triangle MCB$ и $\triangle BCX \sim \triangle MCA$). Значит, четвёрка прямых $C'C$, $C'A$, $C'X$ и $C'B$ — гармоническая. Обозначим $P' = KE \cap C'L$ и $Q' = LE \cap C'K$. Тогда в треугольнике $Q'C'P'$ прямые $Q'L$ и $P'K$ являются высотами, а E — ортоцентр, значит, $C'E \perp Q'P'$ (то есть $Q'P' \parallel CX$). Если $Q'P' \cap KL = \widetilde{C}$, то четверка прямых $C'\widetilde{C}$, $C'Q' = C'A$, $C'E = C'X$ и $C'P' = C'B$ гармоническая. Значит, прямые $C'C$ и $C'\widetilde{C}$ совпадают, откуда $C = \widetilde{C}$. Поскольку $P'Q' \parallel CX$, отсюда следует, что P' и Q' лежат на CX.

Второе решение. Введём точки E, U, V и X, как и в прошлом решении. Обозначим через A_1, B_1 и C_1 точки пересечения прямой $C'E$ с прямыми BC, CA и AB соответственно. Как и выше, равенство $\angle ACX = \angle AC'X = \angle KLE = \angle LCB$

означает, что $\angle ACX = \angle KCB$; с другой стороны, из равенства $\angle KC'E = \angle KCA_1$ следует также, что точки C, C', K и A_1 лежат на одной окружности (см. рис. 5). Отсюда $\angle C'KA_1 = \angle C'CB = \angle C'AB$, то есть $KA_1 \parallel AB$.

Обозначим через N точку пересечения прямых KA_1 и AC. Поскольку $AB \parallel A_1K$ и прямая CM делит AB пополам, она делит пополам и A_1N, то есть $KN = KA_1$. Так как $KE \parallel AB_1$, KE — средняя линия в треугольнике A_1NB_1, то есть $B_1E = EA_1$.

Пусть X' — точка на Ω, диаметрально противоположная X. Пусть прямые $X'A$ и $X'B$ пересекают прямую $C'E$ в точках S и T соответственно. Тогда $\angle SX'T = \angle ACB$ и $\angle X'ST = 90^\circ - \angle SX'C' = 90^\circ - \angle ABC' = \angle ABC$, то есть треугольники ABC и TSX' подобны. Более того, поскольку $\angle SX'X = \angle ACX = \angle BCM$, точки M и X в этих треугольниках соответственны, то есть $SX = XT$.

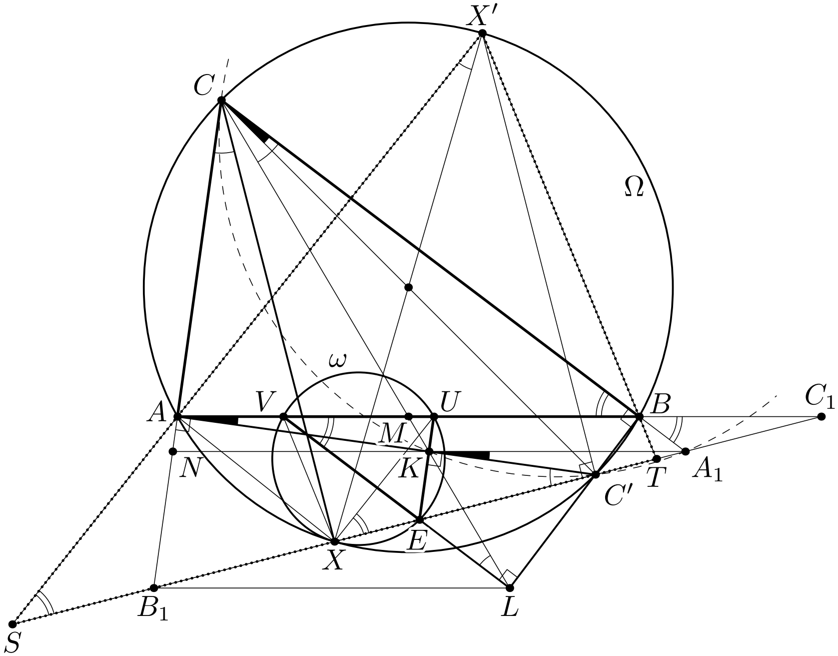

Рис. 5

Из равенства $\angle AST = \angle ABC = \angle C_1BA_1$ следует, что точки S, A, B и A_1 лежат на одной окружности, откуда $C_1A\cdot C_1B = C_1S \cdot C_1A_1$. Аналогично, $C_1A \cdot C_1B = C_1T \cdot C_1B_1$, поэтому $C_1S \cdot C_1A_1 = C_1T \cdot C_1B_1$, или $\frac{C_1S}{C_1B_1} = \frac{C_1T}{C_1A_1}$. Это значит, что отрезки A_1B_1 и TS гомотетичны с центром в C_1; эта гомотетия переводит середину E отрезка A_1B_1 в середину X отрезка ST. Значит, $\frac{C_1S}{C_1B_1} = \frac{C_1X}{C_1E}$, или $\frac{C_1S}{C_1X} = \frac{C_1B_1}{C_1E}$. В силу параллельности $AB_1 \parallel UE$, получаем $\frac{C_1A}{C_1U} = \frac{C_1B_1}{C_1E} = \frac{C_1S}{C_1X}$, что означает, что $UX \parallel AS$. Отсюда получаем $\angle UXE = \angle ASX = \angle ABC = \angle EVU$, то есть точки U, V, E и X лежат на одной окружности ω

Наконец, рассмотрим треугольники ABC и UVE; их соответственные стороны параллельны, так что они гомотетичны (с отрицательным коэффициентом). При этой гомотетии прямая CX' переходит в EX (поскольку $C'X \parallel CX'$), окружность Ω переходит в окружность ω, а значит, X' переходит в X. Поэтому касательная к ω в X параллельна касательной к Ω в X', а значит — и касательной к Ω в X. Отсюда следует, что ω и Ω касаются в X.

11 класс

11.5. Пусть n — натуральное число. На $2n+1$ карточках написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звёздочки в выражении $*x^{2n} + *x^{2n-1} + \ldots + *x + *$ так, чтобы полученный многочлен не имел *целых* корней. Обязательно ли это можно сделать?

(*И. Богданов*)

Ответ. Да, обязательно.

Решение. Пусть p_0, p_1, $\ldots$, p_{2n} — числа на карточках, причём p_{2n} — наибольшее по модулю из них. Поставим p_i коэффициентом при x^i. Тогда, если a — целое число, по модулю не меньшее двойки, то

$$|p_{2n}a^{2n}| > |p_{2n}|(|a^{2n-1}| + |a^{2n-2}| + \ldots + 1) \geqslant$$
$$\geqslant |p_{2n-1}a^{2n-1}| + |p_{2n-2}a^{2n-2}| + \ldots + |p_0| \geqslant$$
$$\geqslant |p_{2n-1}a^{2n-1} + p_{2n-2}a^{2n-2} + \ldots + p_0|,$$

так что a — не корень полученного многочлена.

Осталось переставить коэффициенты p_{2n-1}, p_{2n-2}, $\ldots$, p_0 так, чтобы числа 0 и ± 1 также не были корнями. Числа 0 и 1 в любом случае корнями не являются, поскольку $p_0 \neq 0 \neq p_{2n} + p_{2n-1} + \ldots + p_0$ по условию. Предположим, что $x_0 = -1$ является корнем многочлена при любой перестановке коэффициентов p_{2n-1}, p_{2n-2}, $\ldots$, p_0. Тогда, если поменять местами p_i и p_{i-1} (при $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$), значение многочлена в x_0 не изменится, что возможно лишь при $p_i = p_{i-1}$. Но тогда наш многочлен имеет вид $p_{2n}x^{2n} + p_0(x^{2n-1} + x^{2n-2} + \ldots + 1)$, и его значение в точке $x_0 = -1$ равно $p_{2n} \neq 0$. Противоречие.

11.6. В стране есть $n > 1$ городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиарейсами. При этом между любыми двумя городами существует единственный авиамаршрут (возможно, с пересадками). Мэр каждого города X подсчитал количество таких нумераций всех городов числами от 1 до n, что на любом авиамаршруте, начинающемся в X, номера городов идут в порядке возрастания. Все мэры, кроме одного, заметили, что их результаты подсчётов делятся на 2016. Докажите, что и у оставшегося мэра результат также делится на 2016. (*Ф. Петров*)

Решение. Назовём какой-нибудь город A *столицей*. Назовём город *чётным*, если маршрут из A до него содержит чётное число рейсов, и *нечётным* иначе (таким образом, город A чётный). Тогда чётность любых двух городов, соединённых рейсом, различна. Мы докажем, что сумма чисел, полученных мэрами чётных городов, равна сумме чисел, полученных мэрами нечётных; из этого следует утверждение задачи.

Назовём нумерацию городов *подходящей* для города X, если мэр города X её посчитал. Ясно, что в любой нумерации, подходящей городу X, он имеет номер 1, так что каждая нумерация подходит не более, чем одному городу.

Рассмотрим любую нумерацию, подходящую чётному городу E. Пусть номер 2 в ней носит город W; тогда W — нечётный город, соединённый с E, иначе на маршруте от E до W встретился бы город с бо́льшим номером. Поменяем местами номера 1 и 2; мы получим нумерацию, в которой номер 1 носит нечётный город W.

Рассмотрим любой маршрут m, начинающийся в W. Он получается из некоторого маршрута, выходящего из E, либо добавлением города W в начало (если m проходит через E), либо откидыванием E из начала (в противном случае). Тогда легко видеть, что после обмена 1 и 2 номера на m идут в порядке возрастания.

Итак, после перемены номеров 1 и 2 из нумерации, подходящей для чётного города, получается нумерация, подходящую для нечётного (и наоборот). Это сопоставление взаимно однозначно. Значит, тех и других нумераций поровну, что и требовалось доказать.

11.7. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\leqslant\frac{1}{a^3b^3c^3d^3}.$$

(*А. Храбров*)

Решение. Домножим доказываемое неравенство на $a^3b^3c^3d^3$, получим

$$a^3b^3c^3+a^3b^3d^3+a^3c^3d^3+b^3c^3d^3\leqslant 1. \qquad (*)$$

Поскольку неравенство симметричное, можно считать, что $a\geqslant b\geqslant c\geqslant d$. По неравенству о средних для чисел a, b и $(c+d)$ имеем

$$ab(c+d)\leqslant\left(\frac{a+b+(c+d)}{3}\right)^3=1.$$

Следовательно, $a^3b^3(c+d)^3\leqslant 1$.

Значит, для доказательства $(*)$ достаточно показать, что

$$a^3b^3c^3+a^3b^3d^3+a^3c^3d^3+b^3c^3d^3\leqslant a^3b^3(c+d)^3.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных останется неравенство

$$a^3c^3d^3+b^3c^3d^3\leqslant 3a^3b^3c^2d+3a^3b^3cd^2,$$

которое является суммой трех очевидных неравенств $a^3c^3d^3\leqslant$ $\leqslant a^3b^3c^2d$, $b^3c^3d^3\leqslant a^3b^3cd^2$ и $0\leqslant 2a^3b^3c^2d+2a^3b^3cd^2$.

Замечание. Если допустить неотрицательные значения переменных, то в неравенстве $(*)$ равенство достигается лишь тогда, когда три числа равны 1 и одно равно 0.

11.8. В треугольнике ABC медианы AM_A, BM_B и CM_C пересекаются в точке M. Построим окружность Ω_A, проходящую через середину отрезка AM и касающуюся отрезка BC в точке M_A. Аналогично строятся окружности Ω_B и Ω_C. Докажите, что окружности Ω_A, Ω_B и Ω_C имеют общую точку. (*А. Якубов*)

Решение. Лемма. *Пусть на сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1 так, что сумма их углов при вершинах A_1, B_1 и C_1 кратна* 180°. *Тогда окружности, описанные около треугольников A_1BC, AB_1C и ABC_1, пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть окружности, описанные около треугольников A_1BC и ABC_1, вторично пересекаются в точке X (см. рис. 6). Тогда $\angle(BX, XC) = \angle(BA_1, A_1C)$ и $\angle(AX, XB) = \angle(AC_1, C_1B)$, откуда

$$\angle(AX, XC) = \angle(AX, XB) + \angle(BX, XC) = \\ = \angle(AC_1, C_1B) + \angle(BA_1, A_1C) = \angle(AB_1, B_1C).$$

Это означает, что X лежит на окружности, описанной около треугольника AB_1C, что и требовалось. □

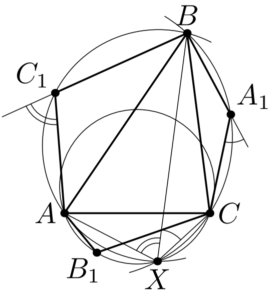

Рис. 6

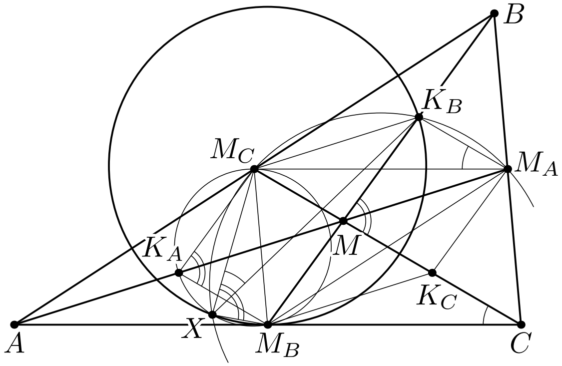

Рис. 7

Перейдём к решению задачи. Пусть K_A, K_B и K_C — середины отрезков AM, BM и CM соответственно (см. рис. 7). Тогда $M_CK_B \parallel AM$ и $K_BM_A \parallel MC$, как средние линии в треугольниках ABM и CBM соответственно; значит, $\angle M_CK_BM_A = \angle AMC$. Аналогично, $\angle M_CK_AM_B = \angle BMC$ и $\angle M_AK_CM_B = \angle BMA$; значит, $\angle M_CK_AM_B + \angle M_BK_CM_A + \angle M_AK_BM_C = 360^\circ$.

Согласно лемме, окружности, описанные около треугольников $M_CK_AM_B$, $M_BK_CM_A$ и $M_AK_BM_C$, имеют общую точку X. Из этих окружностей имеем

$$\angle(K_BX, XM_B) = \angle(K_BX, XM_C) + \angle(M_CX, XM_B) =$$
$$= \angle(K_BM_A, M_AM_C) + \angle(M_CK_A, K_AM_B) =$$
$$= \angle(MC, CA) + \angle(BM, MC) = \angle(BM, CA) = \angle(K_BM_B, AC).$$

Это равенство означает, что окружность Ω_B проходит через точку X. Аналогично, через X проходят окружности Ω_A и Ω_C.