Департамент образования города Москвы

Государственное бюджетное образовательное учреждение

города Москвы

МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ ЛИЦЕЙ № 1501

X Городская научно-практическая техническая конференция школьников

«Исследуем и проектируем»

(место проведения Многопрофильный технический лицей №1501)

«Об асимптотике функций, удовлетворяющих рекуррентным соотношениям»

Автор: Шкаликов Никита Алексеевич

класс: *11-3*

Научный консультант: Скурида Галина Ивановна

к. ф.-м. н., зам. директора

по научной работе ГБОУ Лицея №1501

г. Москва

2012—2013 учебный год

Оглавление

1. Введение…………………………………………………………………………стр.2

Список обозначений…………………………………………………………….стр.2

2. Асимптотические оценки и сравнение функций…………………..стр.3-4

3. Основной результат и его доказательство…………………………..стр.5

3.1. Итерирование рекуррентных соотношений
и деревья рекурсии……………………стр.5-7

3.2. Основная теорема о рекуррентных оценках…………………….стр.7-11

4. Примеры использования………………………………………………стр.12

5. Список литературы…………………………………………………………….стр.13

1. Введение

Вопросы анализа алгоритмов на эффективность, а также построения эффективных алгоритмов активно изучались и изучаются специалистами на протяжении последних 50 лет. В настоящей работе рассматривается одна задача, связанная с оценкой эффективности рекурсивных алгоритмов. Это задача о нахождении асимптотических оценок функций, удовлетворяющих различным рекуррентным соотношениям. В литературе, посвященной этой проблематике, часто встречаются различные результаты, позволяющие находить асимптотические оценки для функций, удовлетворяющих рекуррентным соотношениям того или иного специального вида. Так в работе ([1], Глава 5, §1) приведен результат Бентли, Хакена и Сакса (1980) о получении асимптотических оценок для функций, удовлетворяющих рекуррентному соотношению вида $F(n) = aF\left(n/b\right) + f(n)$ (см. также [2], Глава 9). Найти полное аккуратное доказательство этого результата в доступной литературе не удалось. В настоящей работе дается полное доказательство соответствующего результата и некоторых его обобщений (Теорема 1).

При этом доказательство опирается только на факты, входящие в школьную программу по математике.

Список обозначений.

$\mathbb{R}$ - множество вещественных чисел;

$\mathbb{Z}$ - множество целых чисел;

$\mathbb{R}_+$- множество вещественных неотрицательных чисел;

$\mathbb{Z}_+$- множество целых положительных чисел;

$\lfloor x \rfloor$- целая часть числа $x \in \mathbb{R}$, т.е. $\lfloor x \rfloor = \max\left\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\right\}$;

$\lceil x \rceil$- для $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil = \min\left\{n \in \mathbb{Z} : n \ge x\right\}$;

2. Асимптотические оценки и сравнение функций

Функция f называется асимптотически неотрицательной (при $n \to +\infty$), если найдется такое число $n_0 > 0$, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $f(n) \ge 0$, и асимптотически положительной, если $f(n) > 0$. В дальнейшем все рассматриваемые функции будем считать асимптотически положительными, если не оговорено противное.

Определение. Пусть f и g - две асимптотически неотрицательные при $n \to \infty$ функции. Тогда

(1) $f = \mathrm{O}(g)$ (O-большое) при $n \to +\infty$, если найдется такое $n_1 > 0$, что при всех $n > n_1$ имеет место $0 \le f(n) \le C_1 g(n)$, где $C_1 > 0$ - некоторая абсолютная константа.

(2) $f = \Omega(g)$ (омега-большое) при $n \to +\infty$, если $g = \mathrm{O}(f)$, то есть, если найдется такое $n_2 > 0$, что при всех $n > n_2$ имеет место $0 \le C_2 g(n) \le f(n)$, где $C_2 > 0$ - некоторая абсолютная константа.

(3) $f = \Theta(g)$ (тета-большое) при $n \to +\infty$, если $f = \mathrm{O}(g)$ и $f = \Omega(g)$ при $n \to +\infty$ одновременно.

Другими словами, запись $f = \mathrm{O}(g)$ означает, что с ростом n отношение $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ остается ограниченным сверху, запись $f = \Omega(g)$ - что соответствующее отношение остается ограниченным снизу, а запись $f = \Theta(g)$ - что отношение $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ ограничено при больших n и сверху, и снизу.

Рассмотрим простой пример. Пусть $f_1(n) = an^2 + bn + c$, где $a, c > 0$, то есть f_1 асимптотически неотрицательна. Ясно, что при достаточно больших значениях n имеет место неравенство $f_1(n) \le 2an^2$, то есть $f_1 = \mathrm{O}(n^2)$ (в самом деле, рассматриваемое неравенство имеет место при всех n таких, что $n > \max 0, n_1$, где n_1 - наибольший корень уравнения $an^2 - bn - c = 0$). Аналогично, при достаточно больших значениях n имеет место неравенство $f_1(n) \ge \dfrac{1}{2}an^2$, то есть $f_1 = \Omega(n^2)$. Следовательно, $f_1 = \Theta(n^2)$.

Пусть теперь $f_2(n) = pn + q$, где $p, q > 0$. Рассуждая так же, как и в предыдущем примере, мы получим, что $f_2(n) \le n^2$ при достаточно больших значениях n, то есть $f_2 = \mathrm{O}(n^2)$. Однако $f_2 \ne \Omega(n^2)$ и, следовательно, $f_2 \ne \Theta(n^2)$.

Отметим ряд полезных свойств соотношений $\Theta, \mathrm{O}, \Omega$, которые позволяют использовать их для сравнения функций.

Это, во-первых, *свойство транзитивности*, которое состоит в том, что из соотношений $f = \Theta(g)$ и $g = \Theta(h)$ вытекает, что $f = \Theta(h)$ (аналогично для соотношений O и Ω).

Во-вторых, это свойства *рефлективности*: $f = \Theta(f)$, $f = \mathrm{O}(f)$ и $f = \Omega(f)$; и *симметричности*, верное только для отношения Θ: если $f = \Theta(g)$, то $n = \Theta(f)$.

Кроме того, заметим, что для произвольно взятой пары функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ утверждение о том, что либо $f = \mathrm{O}(g)$, либо $f = \Omega(g)$ неверно.

Скажем, что функция f *ограничена полиномиально*, если найдется такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что $f = \mathrm{O}(x^k)$. Этот факт будет также обозначаться как $f(x) = x^{\mathrm{O}(1)}$.

Наряду с отношениями Θ, O и Ω, введенными выше и позволяющими судить об ограниченности сверху и/или снизу отношения $\dfrac{f}{g}$ при $n \to \infty$, полезно ввести также отношение $f = o(g)$ (о-малое), которое позволит судить об убывании соответствующего соотношения. По определению, $f = o(g)$, если $\dfrac{f(n)}{g(n)} \to 0$ при $n \to +\infty$.

Ясно, что если $f = o(g)$, то $f = \mathrm{O}(g)$. Пример функций $f(x) = x$ и $g(x) = 100x$ показывает, что обратное, в общем случае, неверно.

Обозначения $\Theta, \mathrm{O}, \Omega, o$ часто называют *асимптотическими* обозначениями, а задачу о нахождении для некоторой заданной функции f таких функций g, что появляются соотношения либо $f = \Theta(g)$, либо $f = \mathrm{O}(g)$, либо $f = \Omega(g)$, либо $f = o(g)$ - задачей о нахождении *асимптотики* функции f при $n \to \infty$. Более того, задачу об отыскании функции g, принадлежащей некоторому заданному классу функций Γ и такой, что $f = \Theta(g)$, можно назвать задачей об отыскании *точной* асимптотики функции f в классе Γ.

В дальнейшем, введенные асимптотические обозначения будут использоваться не только для записи соответствующих фактов о поведении функций, но и при записи различных формул. Так, например, формула $f + \Theta(g)$ должна пониматься как $f + h$, где функция h допускает оценку $h = \Theta(g)$. Например, через $f + \Theta(x^{10})$ можно обозначить любое выражение вида $f + P$, где P - полином 10-ой степени, а через $f + x^{\mathrm{O}(1)}$ - любое выражение вида $f + P$, где P - произвольный полином.

3. Основной результат и его доказательство

3.1. Итерирование рекуррентных соотношений и деревья рекурсии.

Пожалуй, самый простой метод анализа рекуррентного соотношения состоит в том, что это соотношение итерируется (применяется само к себе) несколько раз. В результате таких итераций возникает конечная или бесконечная сумма, которая оценивается.

Рассмотрим несколько несложных примеров. Пусть

$$F(n) = 4F\left(\left\lfloor n / 5 \right\rfloor\right) + n$$

Последовательно применяя эту формулу к самой себе, получаем:

$$F\left(n\right) = n + 4F\left(\left\lfloor n / 5 \right\rfloor\right) = n + 4\left(\left\lfloor n / 5 \right\rfloor + 4F\left(\left\lfloor n / 25 \right\rfloor\right)\right) =$$
$$n + 4\left\lfloor n / 5 \right\rfloor + 16\left\lfloor n / 25 \right\rfloor + 64F\left(\left\lfloor n / 125 \right\rfloor\right) = \ldots =$$
$$n + 4\left\lfloor n / 5 \right\rfloor + 16\left\lfloor n / 25 \right\rfloor + \ldots 4^{k-1}\left\lfloor n / 5^{k-1} \right\rfloor + 4^k F(1) = \star$$

Где k подобрано таким образом, что $\left\lfloor n / 5^k = 1 \right\rfloor$, т.е., где $k = \log_5 n$.

Следовательно,

$$\star \le n + 4n / 5 + 16n / 25 + \ldots + 4^{k-1} n / 5^{k-1} + 4^k F(1) \le$$
$$n\sum_{l=0}^{\infty}\left(4 / 5\right)^l + 4^{\log_5 n} F(1) = 5n + n^{\log_5 4} F(1)$$

Так как $\log_5 4 < 1$, а $F(1)$ - это некоторая положительная константа, то $n^{\log_5 4} F(1) = o(n)$ и окончательно получаем, что $F(n) = 5n + o(n) = \mathrm{O}(n)$.

Часто нет необходимости доводить итерацию до конца – необходимая оценка проясняется и её можно доказывать по индукции. Так как округления (взятия тех или иных целых частей) добавляют много трудностей (чаще всего, не вполне существенных), то в начале их целесообразнее не учитывать (достаточно, например, подобрать соответствующие значения параметров – в данном примере $n = 5^k$).

Деревья рекурсии представляют собой удачную иллюстрацию процесса рекурсивной подстановки. Часто грамотно построенное дерево подсказывает, какова необходимая асимптотика. Рассмотрим два примера, которые четко покажут общую идею этой конструкции. В обоих примерах деревья используются только для определения асимптотики, которая затем будет доказываться. Это позволяет нам не уточнять какая конкретно целая часть ($\left\lfloor \cdot \right\rfloor$ или $\left\lceil \cdot \right\rceil$) берется во всех возникающих отношениях.

Пусть функция F удовлетворяет рекуррентному соотношению $F(n) = 2F\left(n / 2\right) + n^2$. Как и в предыдущем примере, мы применим метод итерации рекуррентной формулы для получения верхней асимптотической оценки. Представим процесс подстановки в виде следующего дерева:

$$n^2$$
$$\swarrow \searrow$$
$$F\left(n/2\right) \quad F\left(n/2\right)$$

$$n^2$$
$$\swarrow \searrow$$
$$\left(n/2\right)^2 \qquad \left(n/2\right)^2$$
$$\swarrow \searrow \qquad \swarrow \searrow$$
$$F\left(n/4\right) \quad F\left(n/4\right) \quad F\left(n/4\right) \quad F\left(n/4\right)$$

$$n^2$$
$$\swarrow \searrow$$
$$\left(n/2\right)^2 \qquad \left(n/2\right)^2$$
$$\swarrow \searrow \qquad \swarrow \searrow$$
$$\left(n/4\right)^2 \quad \left(n/4\right)^2 \quad \left(n/4\right)^2 \quad \left(n/4\right)^2$$
$$\swarrow \searrow \quad \swarrow \searrow \quad \swarrow \searrow \quad \swarrow \searrow$$

Значения $F(n)$ вычисляются путем суммирования значений, приписанных ко всем вершинам дерева. Вычислим сумму значений, приписанных к вершинам, находящимся на одном уровне. На первом уровне находится 1 элемент, на втором – 2, на третьем – 4 и т.д. На уровне с номером k (где $k \geq 0$ и номер первого уровне равен 0) находится 2^k вершин. В каждой вершине на уровне k находится значение $\left(n / 2^k\right)^2$. Таким образом, сумма значений, подсчитанная по k-му уровню, равна:

$$\sum_{j=1}^{2^k} \left(n / 2^k\right)^2 = n^2 / 2^k$$

Процесс построения этого дерева оборвется на уровне $k = \lceil \log n \rceil$. Таким образом, сумма значений всех элементов дерева оценивается следующим образом:

$$F(n) \leq n^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l} = \mathrm{O}(n^2)$$

(мы оценили конечную сумму $\sum_{l=0}^{\lceil \log n \rceil} 2^{-l}$ суммой ряда $\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l}$).

С использованием метода индукции можно легко проверить, что в этом случае $F(n) = \Omega\left(n^2\right)$ и, следовательно, $F\left(n\right) = \Theta\left(n^2\right)$.

Рассмотрим еще один пример построения дерева рекурсии и оценки соответствующей рекуррентно заданной функции. Пусть F удовлетворяет рекуррентной формуле $F(n) = F\left(2n / 5\right) + F\left(3n / 5\right) + n$. Построим дерево:

$$n$$
$$\swarrow \searrow$$
$$2n / 5 \qquad 3n / 5$$
$$\swarrow \searrow \qquad \swarrow \searrow$$
$$4n / 25 \quad 6n / 25 \quad 6n / 25 \quad 9n / 25$$
$$\swarrow \searrow \quad \swarrow \searrow \quad \swarrow \searrow \quad \swarrow \searrow$$

Как видно из конструкции дерева, сумма значений на каждом уровне здесь в точности равна n. Дерево обрывается, развившись в глубину не более, чем на уровень $\log_{3/5} n$. Таким образом, мы получаем верхнюю оценку для функции $F(\cdot): F = \mathrm{O}\left(n \log n\right)$.

3.2. Основная теорема о рекуррентных оценках.

Рассмотрим функцию, удовлетворяющую рекуррентному соотношению

$$F(n) = aF\left(n / b\right) + f(n), \tag{1}$$

где $a \geq 1$ и $b > 1$ - некоторые целые константы, а f - определенная на множестве $\mathbb{Z}_+$ *положительная функция* (т.е. $f(n) > 0$ при целых $n \geq 0$). Как отмечалось ранее, выражение в правой части (1) может пониматься двумя способами – как $F\left(\lfloor n / b \rfloor\right) + f(n)$ и как $F\left(\lceil n / b \rceil\right) + f(n)$ соответственно.

Так как все утверждения в данном разделе справедливы для обеих возможных трактовок формулы (1) (это будет показано ниже), то мы будем использовать запись $F\left(n / b\right) + f(n)$, не уточняя, какое именно округление имеется в виду в выражении n / b.

Пусть функция F удовлетворяет соотношению (1). Определим величину

$$\pi_F = \log_b a \geq 0.$$

Определение. Пусть $a > 0$ и $b > 1$ - некоторые целые константы. Скажем, что функция f обладает свойством (a,b)-регулярности, если существуют такие числа $q < 1$ и $N > 0$, что неравенство $af\left(n / b\right) < qf(n)$ выполняется при всех $n > N$.

Теорема 1. Пусть функция F удовлетворяет рекуррентному соотношению (1) (в котором под n / b понимается либо $\lfloor n / b \rfloor$, либо $\lceil n / b \rceil$) и пусть $\pi = \pi_F$. Тогда:

I. Если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f = \mathrm{O}\left(n^{\pi - \varepsilon}\right)$, то $F = \Theta\left(n^{\pi}\right)$.

II. Если $f = \Theta\left(n^{\pi}\right)$, то $F = \Theta\left(n^{\pi} \log n\right)$.

III. Если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f = \Omega\left(n^{\pi + \varepsilon}\right)$, и функция f обладает свойством (a,b)-регулярности, то $F = \Theta\left(f\right)$.

Как уже отмечалось во Введении, результат Теоремы 1 не является новым, однако найти в доступной литературе его полного и аккуратного доказательства не представляется возможным.

Доказательство теоремы 1. Вначале докажем Теорему 1 при дополнительном предположении о том, что функции $F\left(\cdot\right)$ и $f\left(\cdot\right)$ определены только для чисел $n \in E_b = \left\{b^k : k \in \mathbb{Z}_+\right\}$. В этом случае имеют место равенства (похожие вычисления проводились в предыдущем разделе):

$$F(n) = f(n) + aF\left(n / b\right) = f\left(n\right) + af\left(n / b\right) + a^2 F\left(n / b^2\right) =$$

$$f\left(n\right) + af\left(n / b\right) + a^2 f\left(n / b^2\right) + a^3 F\left(n / b^3\right) = \ldots =$$

$$f\left(n\right) + af\left(n / b\right) + a^2 f\left(n / b^2\right) + \ldots + a^{l-1} f\left(n / b^{l-1}\right) + a^l F(1) = \star \tag{2}$$

где $l \in \mathbb{Z}_+$ подобрано таким образом, что $n / b^l = 1$, т.е., где $l = \log_b n$ (здесь учтено, что $n \in E_b$). Заметим также, что $a^l = a^{\log_b n} = n^{\log_b a} = n^\pi$.

Следовательно,

$$\star = f(n) + af\left(n / b\right) + ... + a^{l-1} f\left(n / b^{l-1}\right) + n^\pi F(1) = \Theta\left(n^\pi\right) + \sum_{k=0}^{l-1} a^k f\left(n / b^k\right). \quad \textbf{(3)}$$

Таким образом:

$$F(n) = \Theta\left(n^\pi\right) + G(n) \quad \textbf{(4)}$$

где

$$G(n) := \sum_{k=0}^{l-1} a^k f\left(n / b^k\right), \quad n \in E_b \quad \textbf{(5)}$$

и для оценки функции F нам необходимо оценить функцию G.

Рассмотрим три случая, соответствующие утверждениям Теоремы 1.

Случай 1 – пусть существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f = \mathrm{O}(n^{\pi - \varepsilon})$. Положим, что $r = \pi - \varepsilon$ и $q = a / b^r$. Так как $r < \pi = \log_b a$, то $b^r < a$ и, следовательно $q > 1$. Напомним также, что так как $n \in E_b$, то l - целое число.

Нам достаточно рассмотреть функцию $f(n) = n^r$. Имеем:

$$G(n) = \sum_{k=0}^{l-1} a^k f\left(n / b^k\right) = \sum_{k=0}^{l-1} a^k \left(n / b^k\right)^r = n^r \sum_{k=0}^{l-1} \left(a / b^r\right)^k = n^r \sum_{k=0}^{l-1} q^k = \Theta\left(n^r q^{l-1}\right)$$

Так как

$$n^r q^{l-1} = n^r \left(a^{l-1} / b^{r(l-1)}\right) = (n^r b^r a^{l-1} / b^{rl}) = (n^r b^r a^{l-1} / n^r) = b^r a^{l-1} < a^l = n^\pi ,$$

то $G(n) = \mathrm{O}\left(n^\pi\right)$ и, окончательно, (см. (4)):

$$F(n) = \Theta\left(n^\pi\right) + \mathrm{O}\left(n^\pi\right) = \Theta\left(n^\pi\right).$$

Случай 2 – пусть $f = \Theta\left(n^\pi\right)$. Как и раньше, нам достаточно рассмотреть функцию $f(n) = n^\pi$. Имеем:

$$G(n) = \sum_{k=0}^{l-1} a^k f\left(n / b^k\right) = \sum_{k=0}^{l-1} a^k \left(n / b^k\right)^\pi =$$

$$n^\pi \sum_{k=0}^{l-1} \left(a / b^\pi\right)^k = n^\pi \sum_{k=0}^{l-1} 1^k = n^\pi l = n^\pi \log_b n = \Theta\left(n^\pi \log_b n\right)$$

так как $\pi = \log_b a$. Подставляя полученную оценку в (4), получаем, что

$$F(n) = \Theta\left(n^\pi\right) + \Theta\left(n^\pi \log_b n\right) = \Theta\left(n^\pi \log_b n\right).$$

Случай 3 – пусть существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f = \Omega\left(n^{\pi + \varepsilon}\right)$ и пусть функция f удовлетворяет условию (a,b)-регулярности. Пусть $q < 1$ выбрано в соответствии с этим условием. Тогда:

$$a^k f\left(n / b^k\right) \le a^{k-1} q f\left(n / b^{k-1}\right) \le ... \le f(n) q^k$$

и, следовательно,

$$G(n) = \sum_{k=0}^{l-1} a^k f\left(n / b^k\right) \le f(n) \sum_{k=0}^{l-1} q^k \le f(n) \sum_{k=0}^{\infty} q^k = f(n) / (1 - q) .$$

Так как все слагаемые в (5) положительны и так как при $k = 0$ соответствующее слагаемое в (5) равно $f(n)$, то $G(n) \ge f(n)$. То есть $G = \Theta\left(f\right)$. Из (4) вытекает, что

$$F(n) = \Theta\left(n^{\pi}\right) + \Theta\left(f\right) = \Theta\left(f\right).$$

Таким образом, мы завершили доказательство для случая функций, определенных на множестве E_b.

Теперь закончим доказательство в случае, n не является степенью числа b. В этом случае n / b уже не является целым числом и поэтому выражение n / b должно интерпретироваться одним из следующих способов: как $\lceil n / b \rceil$ или как $\lfloor n / b \rfloor$, соответственно. Мы подробно разберем случай округления с избытком (т.е. случай, когда n / b трактуется как $\lceil n / b \rceil$). Случай округления с недостатком разбирается аналогично.

Итак, пусть функция F удовлетворяет рекуррентному соотношению (1), которое интерпретируется следующим образом:

$$F(n) = aF\left(\lceil n / b \rceil\right) + f(n).$$

Положим $l = \lfloor \log_b n \rfloor$ и рассмотрим последовательность чисел $\left\{n_k : k = 0,1,2,...\right\}$, построенную по следующему правилу:

$$n_k = \begin{cases} n, & \text{при } k = 0 \\ \lceil n_{k-1} / b \rceil, & \text{при } k > 0. \end{cases}$$

Эта последовательность обладает рядом полезных свойств. Во-первых, последовательность $\left\{n_k\right\}$ убывает. Во-вторых, имеет место оценка:

$$n_k = \lceil n_{k-1} / b \rceil \le n_{k-1} / b + 1 \le (1 / b)\left(n_{k-2} / b + 1\right) + 1 \le ... \le n / b^k + 1 / b^{k-1} + ... + 1 / b + 1,$$

из которой вытекает, что

$$n_k \le n / b^k + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{b^j} \le n / b^k + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{b^j} = \frac{n}{b^k} + \frac{b}{b-1}.$$

Применяя это неравенство при $k = l$, и замечая, что $n \le b^{l+1}$, получаем:

$$n_l \le \frac{n}{b^l} + \frac{b}{b-1} \le b + \frac{b}{b-1} = \frac{b^2}{b-1}.$$

Заметим, что $c := b^2 / (b-1)$ - константа, не зависящая от n. Повторяя итерационный процесс, описанный в (2) и (3), и останавливая его на $a^{l-1} f(n_{l-1})$, получаем, что

$$F(n) = a^l F\left(n_l\right) + \sum_{k=0}^{l-1} a^k f\left(n_k\right).$$

Так как $n_l \le c$, где c не зависит от n, то $F\left(n_l\right)$ - некоторая константа, также не зависящая от n. То есть $a^l F\left(n_l\right) = \Theta\left(a^l\right)$. Так как $\log_b n - 1 < l \le \log_b n$, то $a^{-1} n^{\pi} < a^l \le n^{\pi}$ и, следовательно,

$$F\left(n\right) = \Theta\left(n^{\pi}\right) + \sum_{k=0}^{l-1} a^k f\left(n_k\right).$$

Пусть

$$H\left(n\right)=\sum_{k=0}^{l-1}a^k f\left(n_k\right),$$

т.е.

$$F\left(n\right)=\Theta\left(n^{\pi}\right)+H\left(n\right). \qquad \textbf{(6)}$$

Как и раньше, нам необходимо оценить сумму H в трех рассматриваемых случаях асимптотического поведения функции f. Мы сохраним нумерацию этих случаев и все обозначения такими же, как и при доказательстве теоремы для функций, заданных только на множестве E_b.

Случай 1. Нам достаточно оценить $H\left(n\right)$ в случае, когда $f\left(n\right)=n^r$, где $r=\pi-\varepsilon$. Заметим, что $b^k<n$ при $k<l$. При $r\geq 0$ мы можем оценить $a^k n_k^r$ (при $0\leq k<l$) следующим образом:

$$a^k f\left(n_k\right)=a^k n_k^r\leq a^k\left(n/b^l+b/(b-1)\right)^r=a^k n^r/b^{kr}\left(1+(b^k/n)b/(b-1)\right)^r\leq$$
$$a^k n^r/b^{kr}\left(1+b/(b-1)\right)^r.$$

Для того, чтобы оценить $a^k n_k^r$ при $r<0$ достаточно заметить, что $n_k\geq\left(n/b^k\right)$ и, так как при $r<0$ функция $f\left(n\right)=n^r$ убывает, то имеет место следующая простая оценка:

$$a^k n_k^r\leq a^k n^r/b^{rk}.$$

Таким образом, $a^k f\left(n_k\right)\leq c_1 a^k n^r/b^{rk}$, где c_1 не зависит от n, и (при $f\left(n\right)=n^r$) мы получаем оценку:

$$H(n)=\sum_{k=0}^{l-1}a^k n_k^r\leq c_1\sum_{k=0}^{l-1}a^k n^r/b^{rk}.$$

Последняя сумма оценивается точно так же, как оценивалась функция G в случае 1 для функций, определенных только на множестве E_b выше, и, в результате, получается, что $H=\mathrm{O}\left(n^{\pi}\right)$. Согласно (6),

$$F(n)=\Theta\left(n^{\pi}\right)+H(n)=\Theta\left(n^{\pi}\right)+\mathrm{O}\left(n^{\pi}\right)=\Theta\left(n^{\pi}\right),$$

и утверждение I Теоремы 1 полностью доказано (для случая округления с избытком).

Случай 2. В этом случае нам достаточно рассмотреть функцию $f(n)=n^{\pi}$. Оценки $a^k n_k^{\pi}$ для $\pi\geq 1$ и $\pi<1$ проходят в точности аналогично предыдущему случаю.

В результате получается, что в этом случае имеет место оценка:

$$H(n)=\sum_{k=0}^{l-1}a^k n_k^{\pi}\leq c_2\sum_{k=0}^{l-1}a^k n^{\pi}/b^{\pi k}, \qquad \textbf{(7)}$$

где c_2 не зависит от n. Оценим $a^k n^{\pi}/b^{\pi k}$ снизу (напомним, что $\pi\geq 0$). Так как $n_k\geq\left(n/b^k\right)$ (при $k\leq l$), то

$$a^k n_k^{\pi}\geq a^k n^{\pi}/b^{\pi k}.$$

Таким образом, имеет место следующая нижняя оценка:

$$H(n)=\sum_{k=0}^{l-1}a^k n_k^{\pi}\geq\sum_{k=0}^{l-1}a^k n^{\pi}/b^{\pi k}. \qquad \textbf{(8)}$$

Последняя сумма в неравенствах (7) и (8) оценивается точно так же, как оценивалась функция G в случае 2 для функций, определенных только на множестве E_b, рассмотренных выше, и в результате получается, что $H = \Theta\left(n^{\pi} \log n\right)$. Согласно (6),

$$F(n) = \Theta\left(n^{\pi}\right) + H(n) = \Theta\left(n^{\pi}\right) + \Theta\left(n^{\pi} \log n\right) = \Theta\left(n^{\pi} \log n\right),$$

и случай II Теоремы 1 для случая округления с избытком полностью доказан.

Случай 3. В условии (a,b)-регулярности функции f необходимо уточнить, каким именно образом будет интерпретироваться выражение n / b. Ясно, что эта интерпретация не может не совпадать с интерпретацией n / b в рекуррентной формуле. Таким образом, выполнение для функции f условия (a,b)-регулярности означает, что $af\left(\left\lceil n / b \right\rceil\right) \le qf(n)$ при $q < 1$ для всех достаточно больших n. Следовательно:

$$af\left(n_k\right) = af\left(\left\lceil n_{k-1} / b \right\rceil\right) \le qf\left(n_{k-1}\right)$$

и, как и в случае 3 выше,

$$\sum_{k=0}^{l-1} a^k f(n_k) \le f(n) \sum_{k=0}^{\infty} q^k = f(n) / (1-q),$$

т.е. $H = \mathrm{O}\left(f\right)$. В силу положительности f из определения функции H вытекает, что $H(n) \ge f(n)$. Следовательно, $H = \Theta\left(f\right)$, и применение (6) завершает доказательство теоремы в этом (последнем) случае.

$$F(n) = \Theta\left(n^{\pi}\right) + H(n) = \Theta\left(n^{\pi}\right) + \Theta\left(f\right) = \Theta\left(f\right).$$

Дополнительное замечание. По существу, Теорема 1 утверждает, что та из функций f и n^{π_F}, которая растет быстрее, и определяет порядок роста функции F.

Однако, в формулировке теоремы имеется “зазор” в условиях – в самом деле, утверждениях I и III недостаточно просто потребовать, чтобы $f = \mathrm{O}\left(n^{\pi}\right)$ и, соответственно, $f = \Omega\left(n^{\pi}\right)$. Из доказательства видно, где и как используется этот “зазор”.

Легко привести пример рекуррентного соотношения, к которому Теорема 1 неприменима. Например, пусть функция F такова, что $F(n) = 2F(n / 2) + n \log n$. Здесь $a = 2, b = 2, \pi = \pi_F = \log_2 2 = 1$ и $f(n) = n \log n$. Однако, $f \ne \Omega\left(n^{1+\varepsilon}\right)$ ни для какого $\varepsilon > 0$, хотя f асимптотически больше, чем n.

Как же анализировать функции, которые оказываются в таких “зазорах”? Оказывается, например, что если функция f имеет асимптотику

$$f = \Theta\left(n^{\pi} \log^{\nu} n\right),$$

то несложная модификация доказательства утверждения II Теоремы 1 позволяет получить следующую оценку на F:

$$F = \Theta\left(n^{\pi} \log^{\nu+1} n\right).$$

4. Примеры использования

В этом разделе мы приведем примеры использования Теоремы 1, в частности, мы покажем, как её результат может быть использован для анализа прочих алгоритмов поиска и сортировки массивов данных.

1. Пусть $F(n) = 9F(n / 3) + n$. Здесь $a = 9, b = 3, \pi = \pi_F = \log_3 9 = 2$ и $f(n) = n$, т.е., $f = \mathrm{O}\left(n^{\pi-\varepsilon}\right)$ при любом $\varepsilon \in \left(0,1\right]$. Таким образом, к F применимо утверждение I Теоремы 1, из которого следует, что $F = \Theta\left(n^2\right)$.

2. Для функции F, удовлетворяющей соотношению $F(n) = F(2n / 3) + 1$, имеем: $a = 1, b = 3 / 2, \pi = \pi_F = \log_{3/2} 1 = 0$ и $f(n) = 1$. Т.е. $f(n) = n^{\pi}$ и, применяя утверждение II Теоремы 1, получаем, что $F = \Theta\left(\log n\right)$.

Заметим, что рекуррентное соотношение $F(n) = F(2n / 3) + 1$ возникает, например, при анализе алгоритма пирамидальной сортировки.

3. К функции, удовлетворяющей соотношению $F(n) = 3F(n / 4) + n \log n$, применим пункт III Теоремы 1. В самом деле, $a = 3, b = 4, \pi = \pi_F = \log_4 3 < 1$ и $f(n) = n \log n$. Условие $f = \Omega\left(n^{\pi+\varepsilon}\right)$ выполнено, например, при $\varepsilon > 2$. Условие же $\left(3,4\right)$-регулярности функции $n \log n$ легко проверяется:

$$3\left(n / 4\right)\log n / 4 = (3 / 4)n\left(\log n - 2\right) \le (3 / 4)\log n.$$

4. Применим Теорему 1 к анализу алгоритма бинарного поиска данных в упорядоченном массиве. Пусть $F(n)$ - число операций сравнения, необходимых для выполнения бинарного поиска в упорядоченном массиве из n элементов. Как легко показать, для функции F выполняется рекуррентное соотношение: $F(n) = F(n / 2) + \Theta(1)$. В нем $a = 1, b = 2, \pi = \pi_F = \log_2 1 = 0$ и $f = \Theta(1)$. В этом случае применимо утверждение II Теоремы 1, из которого следует, что $F = \Theta\left(\log n\right)$.

5. Аналогичным образом можно применить Теорему 1 для анализа алгоритма сортировки слияниями. В этом случае функция F снова определяется как число операций сравнения, необходимых для сортировки массива из n элементов методом «половинного деления» и «слияния». В этом случае функция F удовлетворяет рекуррентному соотношению $F(n) = 2F(n / 2) + \Theta\left(n\right)$, в котором $a = 2, b = 2, \pi = \pi_F = \log_2 2 = 1$ и $f = \Theta\left(n\right)$. Применяя утверждение II Теоремы 1, получаем, что $F = \Theta\left(n \log n\right)$.

Список литературы.

[1] Головешкин В.А., Ульянов М.В. Теория рекурсии для программистов. М.: ФИЗМАТЛИТ,
2006. 296 с.
[2] Ахо А., Хопкрофт Д., Ульман Д. Структуры данных и алгоритмы. М.: изд. дом "Вильямс",
2003. 384 с.
[3] Д. Грин, Д. Кнут Математические методы анализа алгоритмов. М.: Мир, 1987. 120 с.