Департамент образования города Москвы

Государственное бюджетное образовательное учреждение города Москвы

МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ ЛИЦЕЙ № 1501

X Городская научно-практическая техническая конференция школьников

«Исследуем и проектируем»

(место проведения Многопрофильный технический лицей №1501)

«Орторекурсивное разложение»

Автор: ***Айсин Юнис Ринатович***

класс: *11-1*

Научный руководитель:

Моисеев Дмитрий Владимирович,

учитель математики ГБОУ Лицея № 1501

г. Москва

2012—2013 учебный год

Оглавление

1 Введение

Жан Батист Жозеф Фурье (21 марта 1768 – 16 мая 1830) — великий французский математик и физик. В докладе «О распространении тепла в твердом теле» был первым, кто использовал ряды и интегралы Фурье, названные соответственно в честь него. Тогда его методы были приняты в штыки передовыми на то время математиками: Лагранжем, Лапласом, Био. Теперь же ряды Фурье — это мощный математический инструмент, применяемый для решения большого спектра задач, связанных с волновыми процессами и колебаниями: в астрономии, акустике, теории приливов, в радиотехнике и др. В математике разложение функции в ряд Фурье является отличным методом при решении самых разных задач благодаря тому, что ряд Фурье прозрачным образом ведёт себя при дифференцировании, интегрировании, сдвиге функции по аргументу и свёртке функций. Количество знаний, накопленных за время использования рядов Фурье, не может перекрыть его недостатков, связанных с потребностями нынешней науки. В цикле статей 2000-2005 гг. В. В. Галатенко, А. Ю. Кудрявцева и Т. П. Лукашенко описывается так называемое орторекурсивное разложение функции, сходное по принципу работы с рядами Фурье, но, как было заявлено в работах, обладающее достоинствами по сравнению с ним. Проведенный сравнительный анализ смог бы показать обоснованность орторекурсивного разложения. Кроме этого, автору работы не известны программные реализации орторекурсивного разложения, хотя очевидна потребность в практической проверке заложенных в статьях идеях и проведении конкретных вычислительных экспериментов. Все вышеперечисленные факторы свидетельствуют об *актуальности работы.*

Областями исследования являются теория аппроксимации, теория ортогональных рядов и элементы функционального анализа.

Предметом исследования является аналитически заданная, дифференцируемая и интегрируемая с квадратом функция, определенная на отрезке.

Объект исследования — свойства и область возможного практического применения так называемого орторекурсивного разложения функций.

Цель исследования — сравнительный анализ орторекурсивного разложения функции и классического разложения в ряд Фурье.

Перед автором были поставлены следующие задачи:

- Получить общее представление о системах функций (в том числе, о некоторых конкретных ортогональных системах) и о классическом ряде Фурье;

- ознакомиться, анализируя литературные источники, с определением и основными свойствами орторекурсивной схемы разложения функции;

- разработать эффективный алгоритм орторекурсивного разложения функции;

- практическая реализация алгоритма и создание компьютерной программы, позволяющей эффективно осуществлять орторекурсивное разложение функции и классическое разложение в ряд Фурье.

Для того, чтобы рассмотреть орторекурсивное разложение, нужно ввести понятие разложения функции в ряд Фурье. В работе будет приводиться конструктивное сравнение обоих способов разложений по следующим параметрам:

- Устойчивость к ошибкам вычислений коэффициентов и погрешности определения исходной функции;
- скорость сходимости ряда, понимаемая как количество членов ряда, обеспечивающих достижение наперед заданной точности разложения;
- способность «сглаживать» анализируемую функцию и т.д.
- вычислительная эффективность.

2 Разложение в ряд Фурье

В этом параграфе будут определены основные понятия и даны определения, необходимые для дальнейшей работы с орторекурсивным разложением и разложением в ряд Фурье. Информацию о функциональных пространствах и о ряде Фурье автор почерпнул из монографии [1] И. П. Натансона.

Определение 1. Две функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные на отрезке $[a,\ b]$, называются *взаимно ортогональными*, если

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

.

Определение 2. Функция $f(x)$, заданная на $[a,\ b]$, называется *нормированной*, если

$$\int_a^b f(x)^2 = 1$$

.

Определение 3. Система функций $\{\omega_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ называется *ортонормальной*, если

$$\int_a^b \omega_i(x)\omega_k(x)dx = \begin{cases} 1, & (i = k) \\ 0, & (i \neq k). \end{cases}$$

Пусть какая-нибудь фунция $f(x) \in L_2$ есть линейная комбинация функций ортонормальной системы

$$f(x) = c_1\omega_1(x) + \ldots + c_n\omega_n(x) + \ldots$$

Умножая это равенство на $\omega_k(x)$ и интегрируя его, находим

$$c_k = \int_a^b f(x)\omega_k(x)dx, \text{ тогда}$$

Определение 4. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\omega_k(x)$$

называется *рядом Фурье* функции f по системе $\{\omega_k(x)\}$.

Также стоит отметить некоторые свойства разложения в ряд Фурье, которые характеризуют отношение функции к самому ряду.

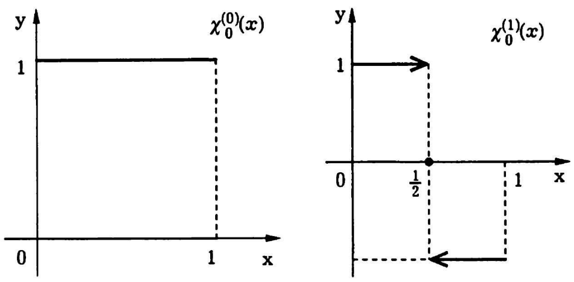

Рис. 2.1: Графики функции χ_0^0 и χ_0^1.

Свойство 1. Для любого натурального n выполняется *тождество Бесселя*: $\left\| f - \sum\limits_{n=1}^{n} c_k \omega_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2$.

Свойство 2. Так как в тождестве Бесселя левая часть всегда неотрицательна, то из него следует *неравенство Бесселя*: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2$.

Свойство 3. Ряд Фурье сходится к f, когда выполняется *равенство Парсеваля*: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$.

За основу в разложении Фурье будет взята система функций Хаара. Эту систему впервые построил и начал изучать А. Хаар в 1909 г. в связи с задачей построения ортонормированной системы функций, ряды Фурье непрерывных функций по которой сходились бы равномерно на $[0, 1]$. Простота и естественность системы Хаара объясняют ее широкое применение в теории функций, теории вероятностей и вычислительной математики. Система Хаара состоит из кусочно постоянных на $[0, 1]$ функций и определяется следующим образом. Как и для функций системы Фабера-Шаудера, для функций системы Хаара наряду с одинарной (порядковой) нумерацией удобно ввести и двойную нумерацию с помощью представления натурального числа $k \geq 2$ в виде $k = 2^m + n$, где $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $n = \overline{0, 2^m - 1}$. Таким образом, для каждой функции Хаара могут быть использованы два равноценных обоозначения $\chi_k(x)$ и χ_m^n, где числа m и n связаны отношением $k = 2^m + n$.

Первая функции системы постоянна:

$$\chi_0^0(x) = 1,\ x \in [0, 1],$$

а вторая имеет вид

$$\chi_0^1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2) \\ 0, & x = 1/2 \\ -1, & x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Эти две функции представлены на рис. 2.1

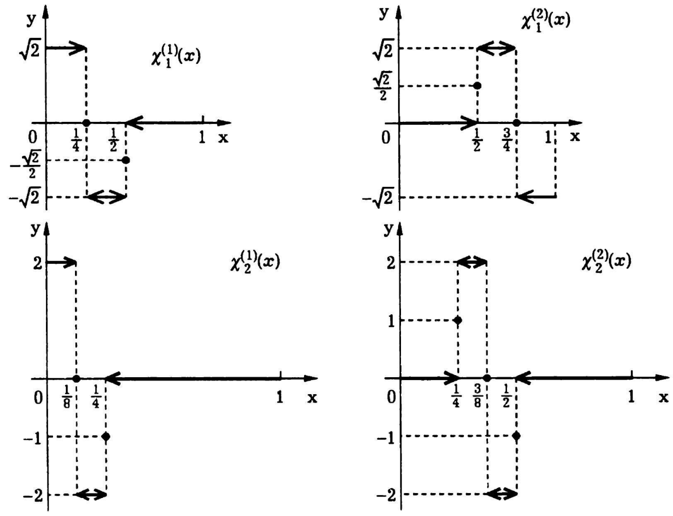

Рис. 2.2: Функции второй и две первые функции третьей пачек.

Последующие функции $\chi_m^n(x)$ системы Хаара с номерами $m \in \mathbb{N}$ и $n \in [1, \ldots, 2^m - 1]$ определяются равенством

$$\chi_m^n = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & x \in \left(\frac{2n-2}{2^{m+1}}, \frac{2n-1}{2^{m+1}}\right) \\ -\sqrt{2^m}, & x \in \left(\frac{2n-1}{2^{m+1}}, \frac{2n}{2^{m+1}}\right) \\ 0, & x \notin \left[\frac{2n-2}{2^{m+1}}, \ \frac{2n}{2^{m+1}}\right] \end{cases} .$$

На рис. 2.2 представлено ещё несколько функций системы всплесков Хаара.

3 Орторекурсивное разложение

Орторекурсивные разложения были впервые рассмотрены Т. П. Лукашенко в 2000 г. в статье [2]. Их идея восходит ещё к заметке Б. С. и С. Б. Стечкиных 1963 г. [3]. Дальнейшее развитие изложенных там идей и исследование некоторых свойств разложения нашли отражение в статьях В. В. Галатенко (см. [4], [5]).

Пусть $(H, \cdot, \cdot)$ — пространство со скалярным произведением над полем действительных или комплексных чисел, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система ненулевых элементов в H, $f \in H$. Индуктивно определим последовательность остатков $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательность коэффициентов $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим

$$r_0 = f,$$

если уже определен остаток r_n, то положим

$$\hat{f}_{n+1} = \frac{(r_n, e_{n+1})}{(e_{n+1}, e_{n+1})},$$

$$r_{n+1} = r_n - \hat{f}_{n+1} e_{n+1} = f - \sum_{k=1}^{n+1} \hat{f}_k e_k.$$

Определение 1. Формальный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$ называется *орторекурсивным разложением* (рекурсивным рядом Фурье) *элемента f по системе* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Данное разложение обладает рядом свойств, аналогичных свойствам разложения в ряд Фурье по ортогональным системам. Для орторекурсивного разложения справедливы аналоги неравенства Бесселя, тождества Бесселя, равенства Парсеваля. Доказательство приведенных аналогий рассмотрено подробнее в статье [6].

Теорема (Т. П. Лукашенко). Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система ненулевых элементов H, f — некоторый элемент H, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$ — орторекурсивное разложение элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- для любого натурального числа N выполняется равенство

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} \hat{f}_n e_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \left| \hat{f}_n \right|^2 \|e_n\|^2$$

  (аналог тождества Бесселя).

- имеет место неравенство
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\hat{f}_n\right|^2\|e_n\|^2 \leqslant \|f\|^2$$
(аналог неравенства Бесселя).

- орторекурсивное разложение $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\hat{f}_n e_n$ элемента f сходится к f тогда и только тогда, когда справедливо равенство
$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\hat{f}_n\right|^2\|e_n\|^2$$
(эквивалентность сходимости разложения к разлагаемому элементу и равенства Парсеваля).

При условии, что система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна, орторекурсивное разложение по ней и обычное разложение в ряд Фурье совпадают. Если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ еще и полна, то разложение элемента f из H сходится к f, т.е. имеет место выполнения равенства Парсеваля. Но для любой последовательности коэффициентов $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, отличной от $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$, новый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ будет либо расходиться, либо сходиться к элементу, отличному от f. Это значит, что орторекурсивное разложение по полной ортогональной системе (как и разложение в ряд Фурье по этой же системе) сходится к данному элементу, но не обладает абсолютной устойчивостью к ошибкам, возникающим например при вычислении коэффициентов или при интегральных исчислениях (так, орторекурсивное разложение элемента e_1 по системе $\sqrt{1-|\varepsilon|^2}e_1+\varepsilon e_2, e_2, e_3, e_4, \ldots$, где $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — замкнутая ортонормированная система, а ε — число, по модулю меньшее единицы, не сходится к e_1). На практике вычислительные ошибки неизбежны, а значит становится актуальным вопрос поиска системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая соответственно будет удовлетворять некоторым условиям:

(I) Орторекурсивное разложение любого элемента f к H по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f;

(II) Орторекурсивное разложение по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно устойчиво к ошибкам, возникающим при вычислениях.

4 Абсолютная устойчивость к ошибкам и примеры систем функций

Формализуем сказанное в предыдущей главе. Пусть $(H, \cdot, \cdot)$ — пространство со скалярным произведением над полем действительных или комплексных чисел, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система ненулевых элементов H, f — некоторый элемент H. Индуктивно определим последовательность остатков $\{r_n^e\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательность коэффициентов $\{\hat{f}_n^e\}_{n=1}^{\infty}$. Положим

$$r_n^e = f.$$

Если уже определен остаток r_n^e, то коэффициент $\{\hat{f}_{n+1}^e\}$ запишем в виде

$$\hat{f}_{n+1}^e = \frac{(r_n^e, e_{n+1})}{(e_{n+1}, e_{n+1})}(1 + \varepsilon_{n+1}) + \xi_{n+1},$$

$$r_{n+1}^e = r_n^e - \hat{f}_{n+1}^e e_{n+1} = f - \sum_{k=1}^{n+1} \hat{f}_k^e e_k.$$

где ε_{n+1} и ξ_{n+1} — некоторые числа.

Определение 2. Формальный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n^e e_n$ будем называть *орторекурсивным разложением элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$*.

Впервые определение было предложено Р. Грибонвалем и М. Нилсеном в работе [7]. Используемая форма записи ошибок допускает иную интерпретацию: при малых по абсолютной величине значениях ε_n величину ξ_n можно определять как число, характеризующее абсолютную ошибку в вычислении коэффициента $\hat{f}_n^e$; при малых по абсолютной величине значениях ξ_n величину ε_n можно определять как число, характеризующее относительную ошибку в вычислении коэффициента $\hat{f}_n^e$. Используемая форма записи ошибок удобна как для теоретической работы (упрощение формулировки и доказательств теорем), так и для практической реализации, в которой последовательность ошибок E хоть и не известна, но вполне поддающаяся оценке.

Определение 3. Пусть $\mathcal{E}$ — некоторое непустое множество последовательностей числовых пар. Будем говорить, что орторекурсивное разложение по системе ненулевых элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *абсолютно устойчиво к ошибкам из множества $\mathcal{E}$*, если для любого элемента $f \in H$ и любой последовательности $E = \{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{E}$ орторекурсивное разложение элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками H сходится к f.

Через $\mathcal{E}_0$ обозначим множество последовательностей $\{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих следующему условию: существует такое $N \in \mathbb{Z}^+$, что для всех $n \in \{N+1, N+2, N+3, \ldots\}$ справедливы равенства $\varepsilon_n = \xi_n = 0$.

Определение 4. Будем говорить, что орторекурсивное разложение по системе ненулевых элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов*, если орторекурсивное разложение по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно устойчиво к ошибкам из множества $\mathcal{E}_0$.

Теперь рассмотрим некоторые системы функций, разложение по которым обладает абсолютной устойчивостью к любому конечному числу ошибок в смысле определения 4. Наибольшее внимание автор уделил системе двоичных сжатий и сдвигов ввиду ее нетривиальности по сравнению с системами из примеров 1 и 2.

Пример 1. Пусть $(H, \cdot, \cdot)$ — произвольное сепарабельное бесконечномерное пространство со скалярным произведением над полем действительных или комплексных чисел, $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная замкнутая ортогональная система в H и $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная расходящаяся последовательность натуральных чисел. Рассмотрим систему

$$d_1, d_2, \ldots, d_{k_1}, d_1, d_2, \ldots, d_{k_2}, \ldots, d_1, d_2, \ldots, d_{k_n}, \ldots.$$

Орторекурсивное разложение по этой системе абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов.

Пример 2. Пусть I — произвольный невырожденный промежуток действительной оси. В качестве H рассмотрим пространство $L^2(I)$ классов эквивалентности измеримых действительнозначных или комплекснозначных функций. Пусть $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система ограниченных невырожденных промежутков, удовлетворяющая следующим условиям:

(α) для любого натурального числа n справедливо включение $\Delta_n \subset I$.

(β) система промежутков $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ покрывает I в смысле Витали, т.е. для любой точки $x \in I$ и любого положительного числа ε существует такой номер n, что $x \in \Delta_n$ и $|\Delta_n| < \varepsilon$.

(γ) для любой пары индексов i и j, $i < j$, либо пересечение $\Delta_i \cap \Delta_j$ пусто, либо имеет место включение $\Delta_i \supset \Delta_j$.

Обозначим через $e_n(x)$ характеристическую функцию промежутка Δ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ В статье [6] доказано, что для любой функции $f \in L^2(I)$ ее орторекурсивное разложение по системе $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f в метрике L^2. Из этого утверждения и того факта, что при удалении любого конечного числа промежутков из системы, удовлетворяющей условиям $(\alpha) - (\gamma)$, получается система, также удовлетворяющая этим условиям, следует, что орторекурсивное разложение по системе $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов.

При программной реализации описанного в примере 2 выбора системы $\{e_n\}$ интервалы Δ_n выбирались наиболее просто: как последовательные непересекающиеся интервалы равной длины, объединение которых равно I. Данный вид систем функций рассмотрен более подробно в статье [6].

Пример 3. Рассмотрим в качестве H пространство $L_2[0, 1]$ классов эквивалентности измеримых действительнозначных или комплекснозначных функций. Пусть φ — такой

элемент H, что
$$\int_0^1 \varphi(x)dx \neq 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \omega_2^2(\varphi, 2^{-n}) < \infty,$$
где
$$\omega^2(\varphi, \delta) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \left(\int_0^{1-h} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$
— интегральный модуль непрерывности в пространстве $L_2([0,1])$. Последнее условие выполняется, в частности, для всех элементов φ, принадлежащих для некоторого $\alpha > 0$ пространству $Lip_\alpha[0,1]$. На множестве $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ доопределим φ нулем. Для каждого натурального числа n положим
$$e_n(x) = \varphi(2^i x - k),$$
где $x \in [0,1]$, $n = 2^i + k$, $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $k \in \{0, 1, 2, ..., 2^i - 1\}$ (т.е. $e_n(x)$ получается из $\varphi(x)$ сжатием в 2^i раз и сдвигом на $k/2^i$). Система $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой двоичных сжатий и сдвигов элемента φ. Из [[8], теорема 1] следует, что орторекурсивное разложение по системам абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении коэффициентов.

Системы функций, представленные в примере 3, описаны в тезисах [8], [9]; также указанные системы и доказательство устойчивости орторекурсивного разложения по ним изучаются в статье [4].

5 Сравнение разложения Фурье и ортрекурсивного разложения

Программа, написанная на языке Object Pascal в среде Borland Delphi, позволяет осуществить сравнение орторекурсивного разложения по системе Хаара (далее сокращенно ОРР), орторекурсивного разложения по системе всплесков Хаара (сокращение ОРХ) и разложения в ряд Фурье по системе всплесков Хаара (сокращение ФХ). Кроме того, для удобства пользователя, программа позволяет добавлять «ошибки» в вычисление коэффициентов, имитировать шум в данном сигнале, также изменять такие параметры, как точность интегрирования, детализация построений и т.д. В плане функционала программы реализован спектр идей, связанных с теоретическими возможностями самих разложений. Для начала, стоит упомянуть такое естественное решение, как возможность введения раскладываемой функции, также предоставлен список уже имеющихся формул, использованных автором в самом проекте. Для удобства пользователя все изменения в количестве коэффициентов разложения были выведены на основную форму. Изменения в характеристике имитации ошибок и шума можно осуществить в отделе «Параметры»; также возможна коррекция точности интегрирования (в продукте реализовано численное интегрирование методом Симпсона) и детализации самой прорисовки. Для нужд сравнительного анализа в проект интегрирован таймер, ведущий отсчет времени вычисления коэффициентов того или иного разложения, а также счетчик количества операций, совершенных в процессе разложения. Продукт может сохранять полученные изображения в формате .BMP (графический файл Bit Map).

Для начала необходимо удостовериться в равноправии всех способов разложений. Для этого была введена двойная нумерация, позволяющая раскладывать функцию по пачкам коэффициентов того или иного метода. Осуществлено орторекурсивное разложение по той же системе, что и разложение в ряд Фурье. На рис. 7.1 и 7.2 представлены функции $\sin 2\pi x$ и $|\ln(2x + 1/2)|$ соответственно (все указанные изображения представлены в Приложении 1). На рис. 7.3–7.6 приведено построение каждого разложения и наглядно показано ожидаемое совпадение всех методов. Для каждого из графика определен собственный цвет; красный соответствует самой функции, зеленый — ОРР, бирюзовый — ОРХ, черный — ФХ. При любом количестве пачек все разложения будут совпадать, гораздо интереснее изучить их при изменениях в функции и коэффициентах. Дальше для имитации ошибок и шума будет использовано гауссовское распределение, так как оно более ярко отражает естественность изменений в параметрах.

Первый опыт — установление устойчивости методов к ошибкам при вычислении коэффициентов. Как заявлено выше, ОРР обладает абсолютной устойчивостью к любому конечному числу ошибок. И действительно, на рисунках 7.10–7.13 показано, что ОРР ведет себя довольно уверенно при абсолютных ошибках при вычислениях коэффициентов, и устойчиво к относительным, чего не скажешь о ФХ. ОРХ проявляет частичную активность в поглощении ошибок, и если при относительных ошибках ОРХ может держаться на уровне ОРР, то абсолютные ошибки в коэффициентах остаются на виду. Это означает, что ОРР прекрасно подходит для сглаживания раскладываемой функции.

Второй опыт — добавление белого шума. На рисунках 7.14–7.15 представлено разложения функции с мультипликативным белым гауссовским шумом. Здесь оранжевым цветом представлена первоначальная функция. На первом рисунке трудно заметить отличий в разложениях, но на втором рисунке можно увидеть, что ОРР ведет себя немного лучше, чем ОРХ и ФХ. Также возможно добавление аддитивного белого гауссовского шума, но автор счел излишним приводить соответствующие иллюстрации отсутствия явных отличий в построениях.

Последний эксперимент — установление вычислительной эффективности. Для этого поставим все разложения в равное положение. Представим, что у нас есть поступающий сигнал с большими помехами, также имеются относительно небольшие изъяны в вычисление коэффициентах. Поставлена задача найти оптимальный способ разложения данного сигнала при определенной точности. На рисунках 7.16–7.17 представлены результаты данного теста. Оказалось, что ФХ обладает наибольшей вычислительной эффективностью в плане затраты времени, при этом не достигается желаемого результата ввиду серьезных погрешностей в самом разложении.. Напротив, ОРР обладает большим временем вычисления, но точность гораздо лучше. На этот раз ФХ показало лучший результат, нежели ОРР и ОРХ.

6 Заключение

В ходе данной работы автором было разработано приложение, осуществляющее орторекурсивное разложение вводимой пользователем функции по некоторым системам. С помощью этого приложения было проведено несколько экспериментов, позволяющих сравнить орторекурсивное разложение и классическое Фурье-разложение функции. Помимо привлекательной возможности раскладывать функции в формальный ряд по неортогональным системам, обеспечиваемой орторекурсивным разложением, в работе убедительно показано, что:

- орторекурсивное разложение устойчиво как к ошибкам вычисления коэффициентов разложения, так и к ошибкам вычисления значений раскладываемой функции;

- в виду устойчивости к ошибкам орторекурсивное разложение может быть использовано для «сглаживания» раскладываемой функции (в частности, для шумоподавления при обработке звуковых сигналов);

Не подтвердилась гипотеза о лучшей вычислительной эффективности у орторекурсивного разложения по сопоставлению с разложением в ряд Фурье. У данного проекта есть потенциал к развитию представленных в нем идей. Автор надеется, что возможно нахождение компромисса между интерактивностью финального продукта и эффективностью вычислений в упрощенной версии. Разработанную библиотеку функций можно использовать в любых программных продуктах, осуществляющих, к примеру, частотный анализ и обработку сигналов различной природы.

Литература

[1] *Натансон И. П.*Теория функций вещественной переменной // СПб.: Лань, 1999.

[2] *Лукашенко Т. П.* Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера-Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 10-й Саратовской зимней математической школы. 27 января - 2 февраля 2000 г. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2000. С. 83.

[3] *Стечкин Б. С. , Стечкин С. Б.* Среднее квадратическое и среднее арифметическое // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. №2. С. 287-290.

[4] *В. В. Галатенко* Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов // Изв. РАН. Сер. матем., 69:1 (2005), 3–16

[5] *В. В. Галатенко* Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций с ошибками при вычислении коэффициентов // Изв. РАН. Сер. матем., 69:1 (2004), 21-36

[6] *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. МГУ. Сер.1. Матем., мех. 2001. №1. С. 6-10

[7] *Gribonval R., Nielsen M.* Aproximate Weak Greedy Algorithms // Adv. Comput. Math. 2001. V. 14. № 4. P. 361-378.

[8] *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 11-й Саратовской зимней школы. Саратов: «Колледж», 2002. С. 106-108.

[9] *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по системам неортогональных всплесков // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы конференции. Воронеж. гос.ун-т, 2003. С. 137-138.

[10] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа // Наука, М., 1972

7 Приложение 1

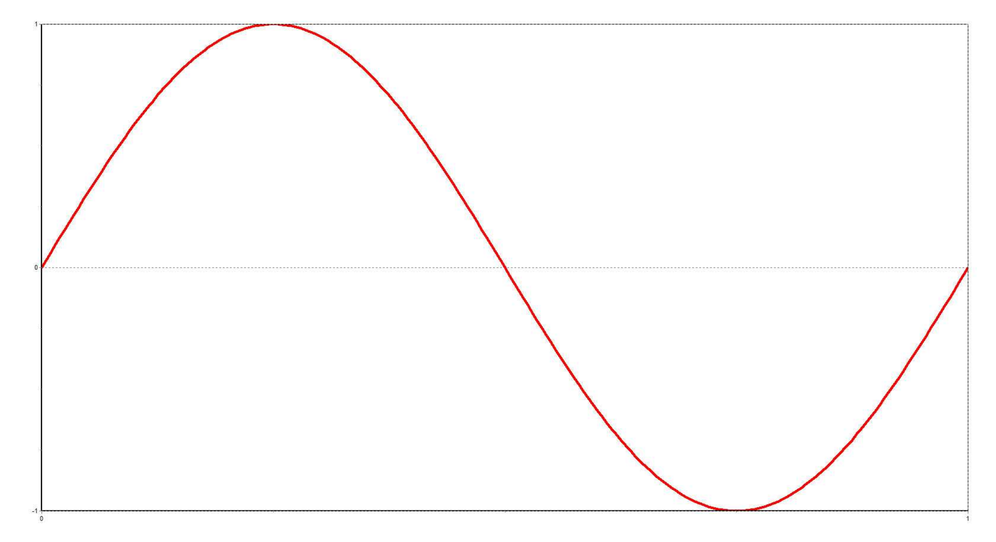

Рис. 7.1: График функции $y = \sin 2\pi x$.

Рис. 7.2: График функции $y = |\ln(2x + \frac{1}{2})|$.

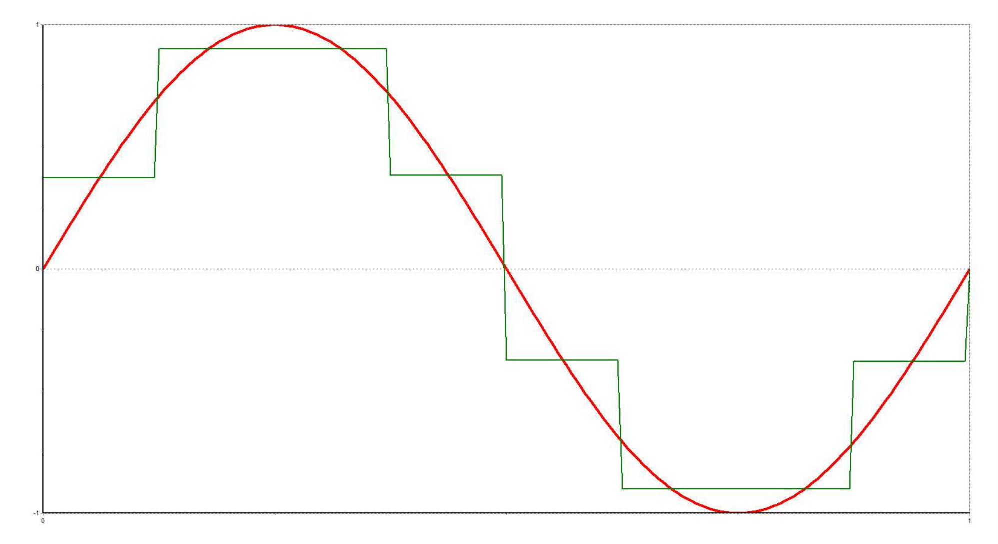

Рис. 7.3: Орторекурсивное разложение по системе Хаара (далее сокращенно ОРР); 3 пачки.

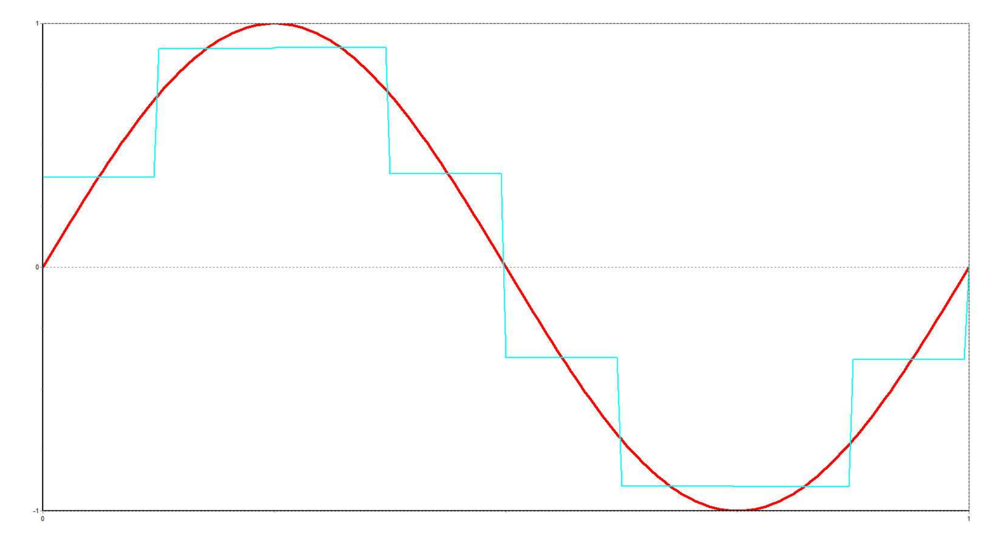

Рис. 7.4: Орторекурсивное разложение по системе всплесков Хаара (далее ОРХ); 3 пачки.

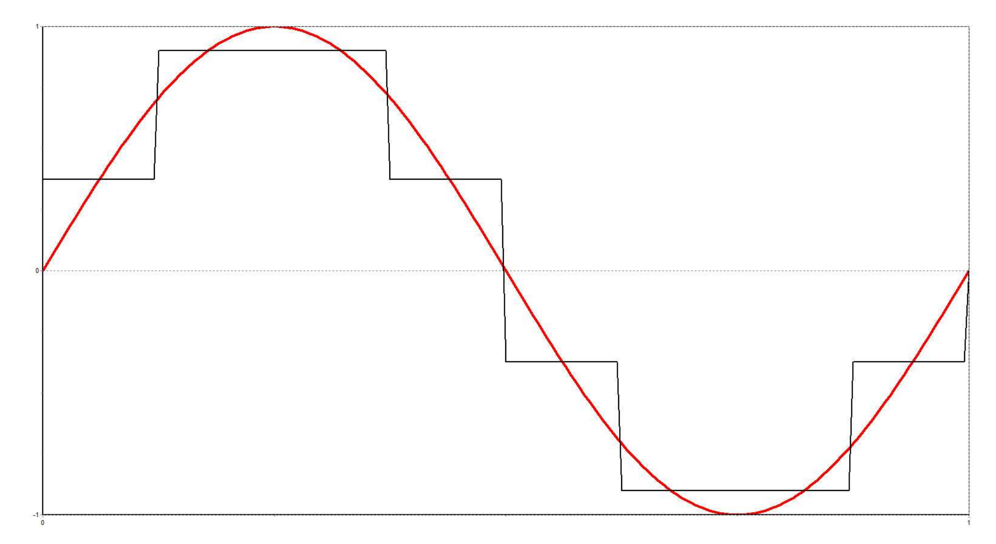

Рис. 7.5: Разложение в ряд Фурье по системе всплесков Хаара (далее ФХ); 3 пачки.

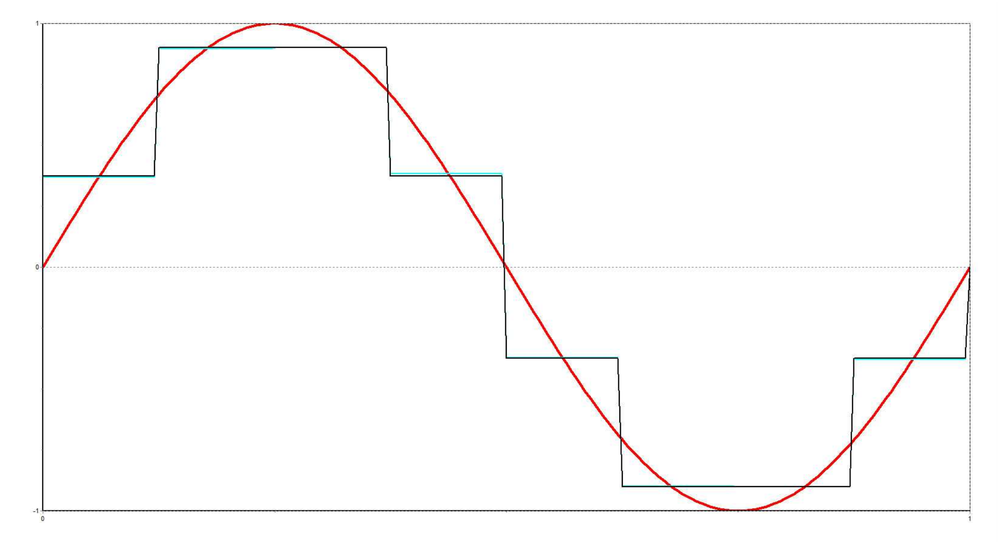

Рис. 7.6: Совпадение орторекурсивного разложения по ортонормированной системе и разложения в ряд Фурье.

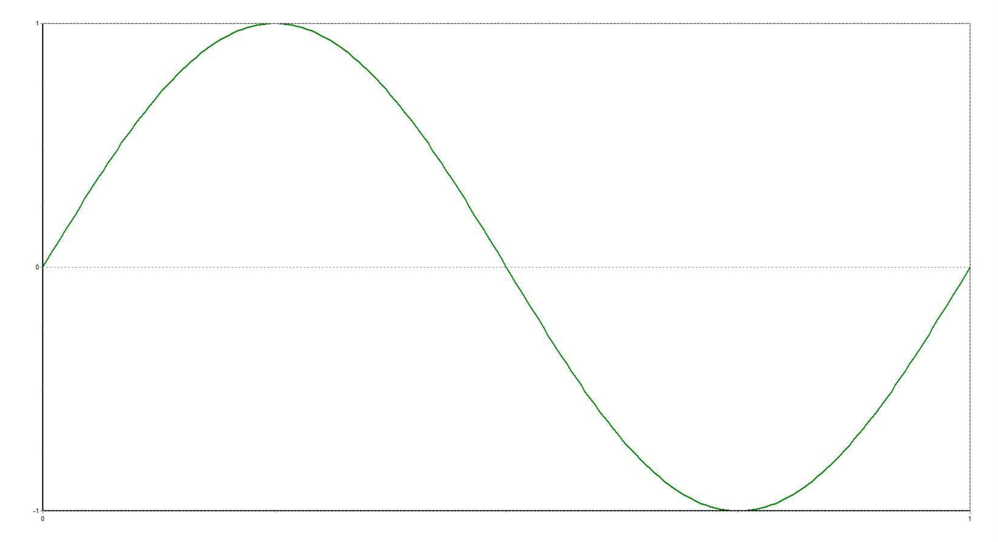

Рис. 7.7: ОРР (10 пачек).

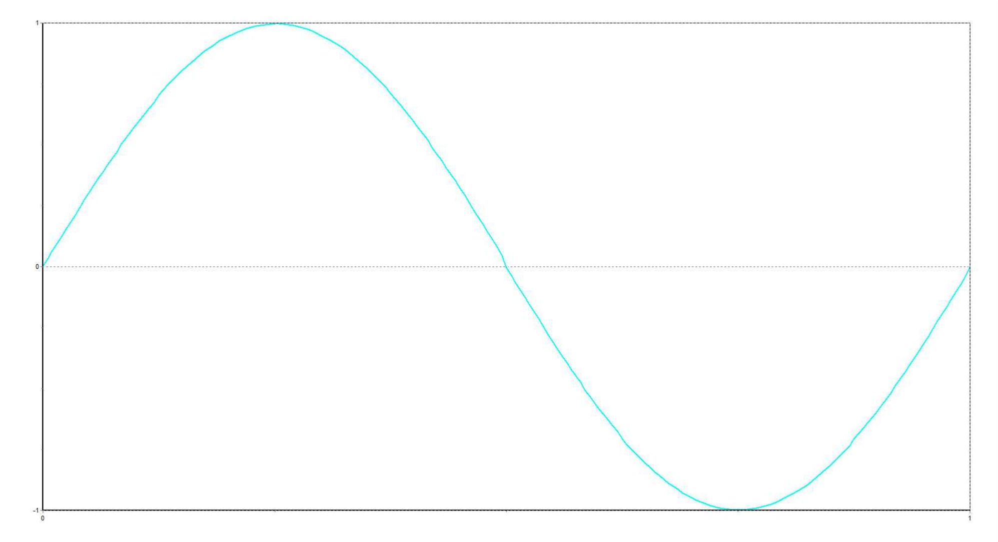

Рис. 7.8: ОРХ (10 пачек).

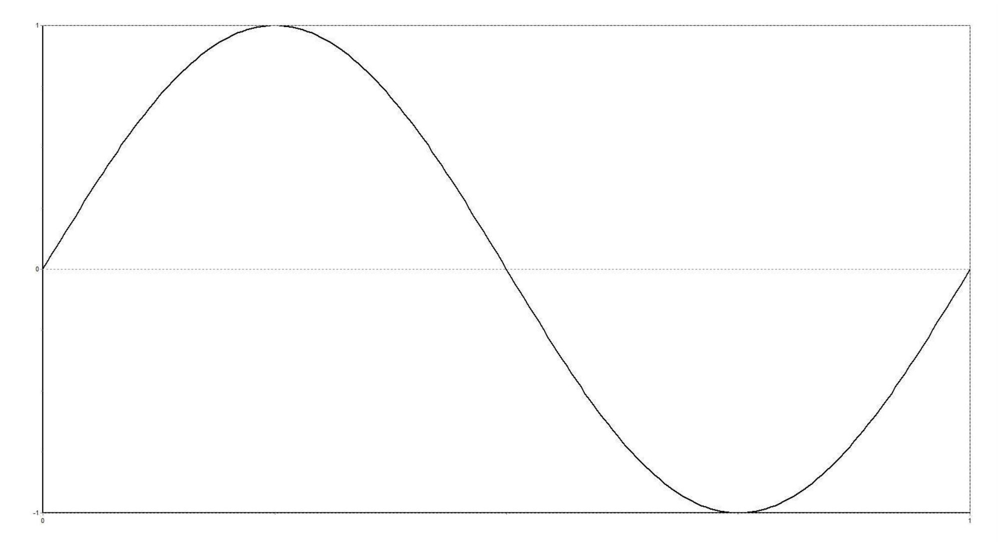

Рис. 7.9: ФХ (10 пачек).

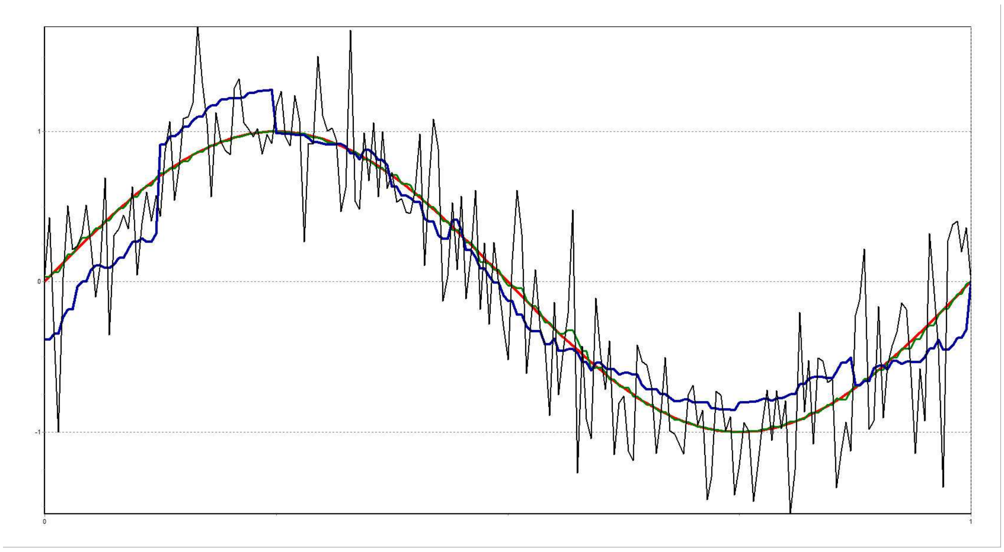

Рис. 7.10: Относительная ошибка в вычислении коэффициентов (7 пачек, функция $\sin 2\pi x$).

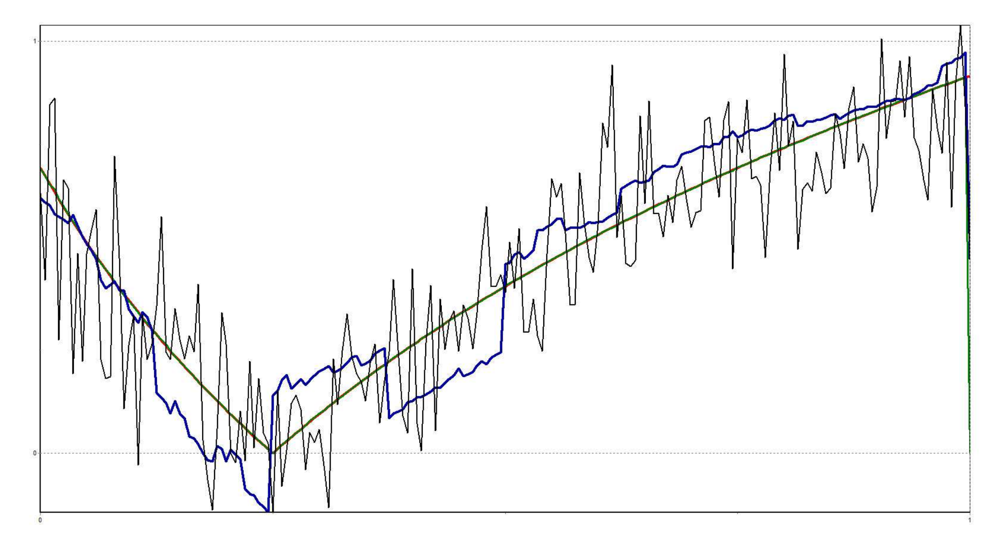

Рис. 7.11: Относительная ошибка в вычислении коэффициентов (10 пачек, функция $y = |\ln(2x + \frac{1}{2})|$).

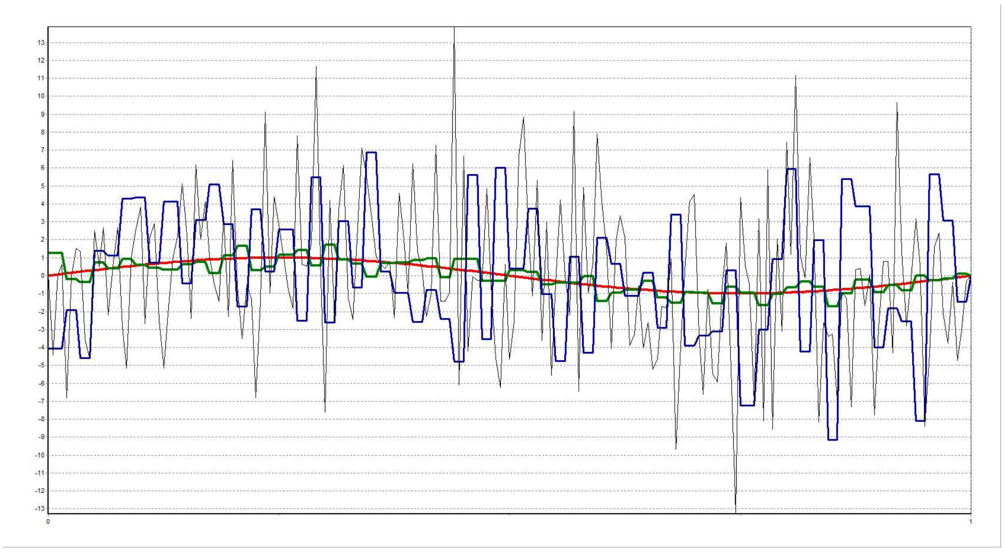

Рис. 7.12: Абсолютная ошибка в вычислении коэффициентов (6 пачек, функция $\sin 2\pi x$).

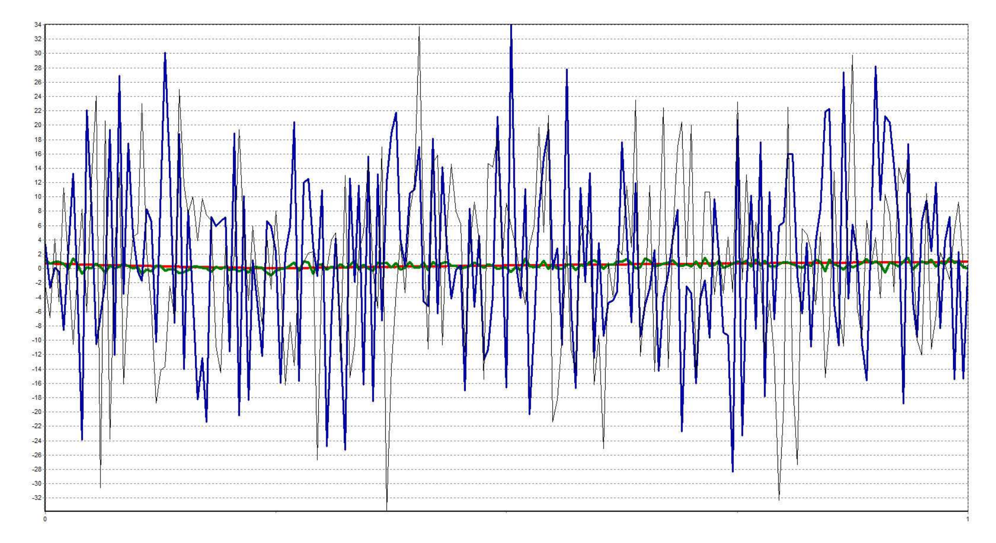

Рис. 7.13: Абсолютная ошибка в вычислении коэффициентов (9 пачек, функция $\sin 2\pi x$).

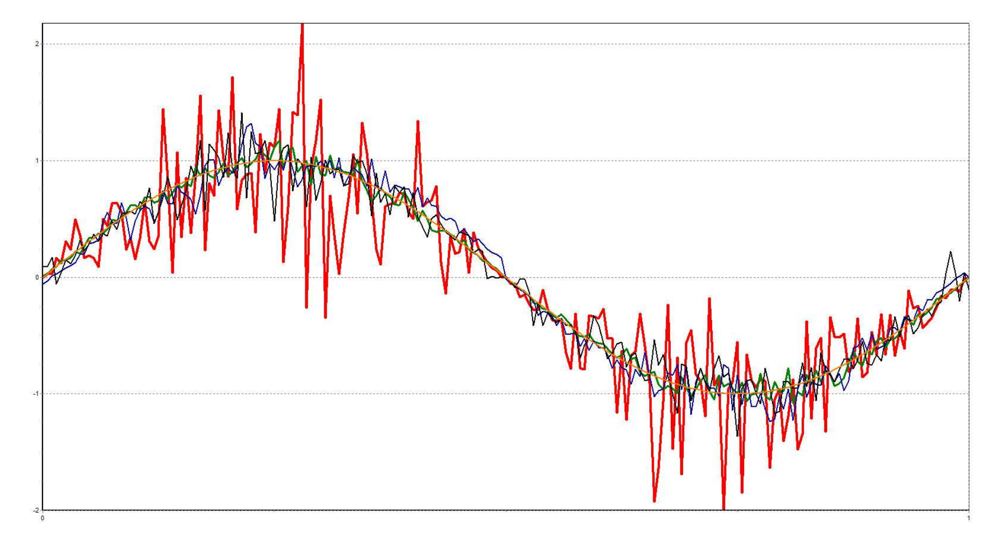

Рис. 7.14: Мультипликативный шум на функции $\sin 2\pi x$ (9 пачек).

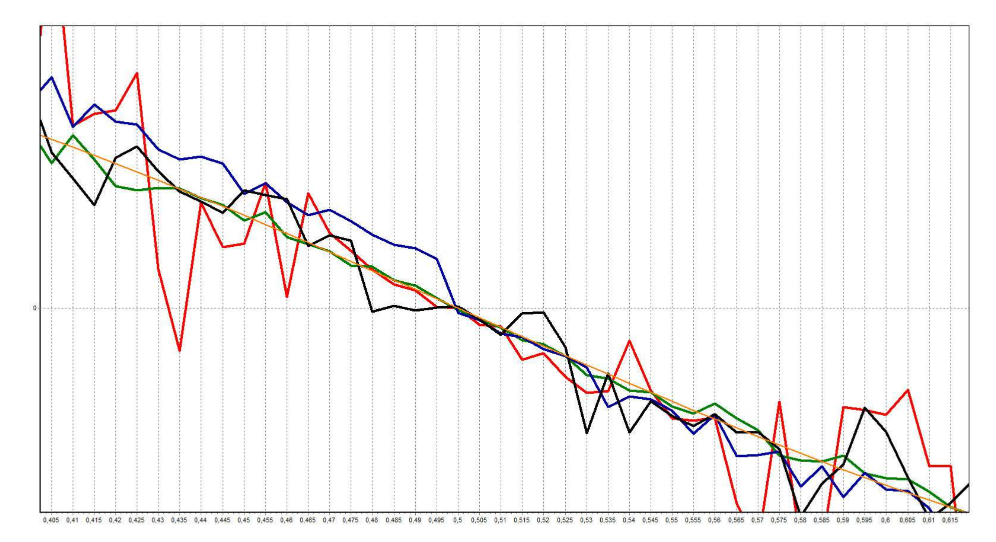

Рис. 7.15: Увеличенный фрагмент предыдущего чертежа.

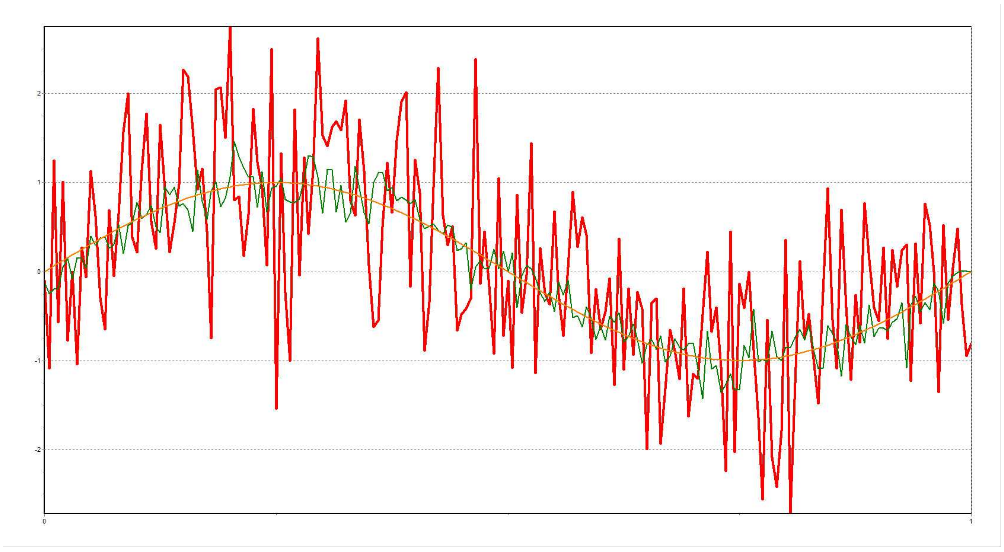

Рис. 7.16: ОРР зашумленного сигнала с ошибками в вычислении коэффициентов (10 пачек). Время построения — ≈ 1,42 усл. ед. вр.

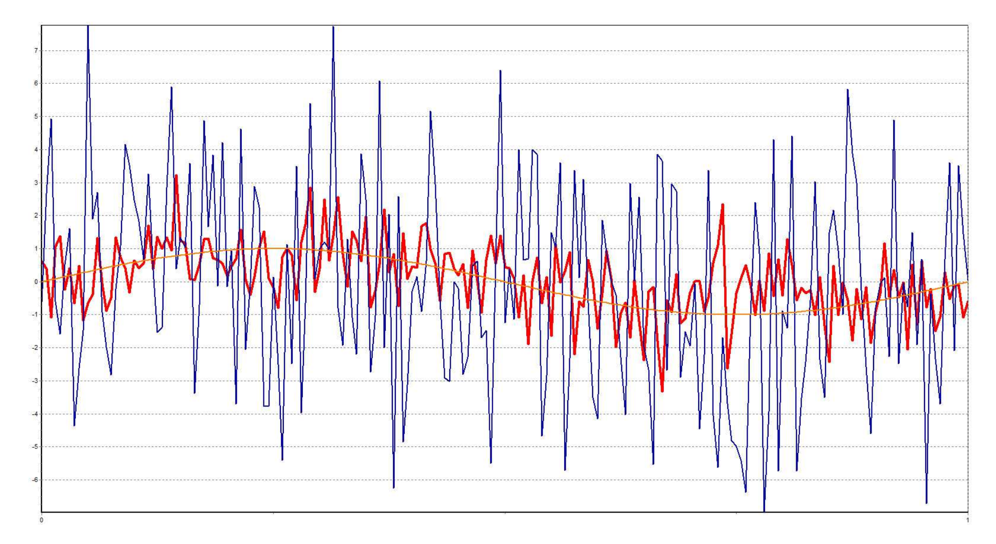

Рис. 7.17: ОРХ зашумленного сигнала с ошибками в вычислении коэффициентов (10 пачек). Время построения — ≈ 1,26 усл. ед. вр.

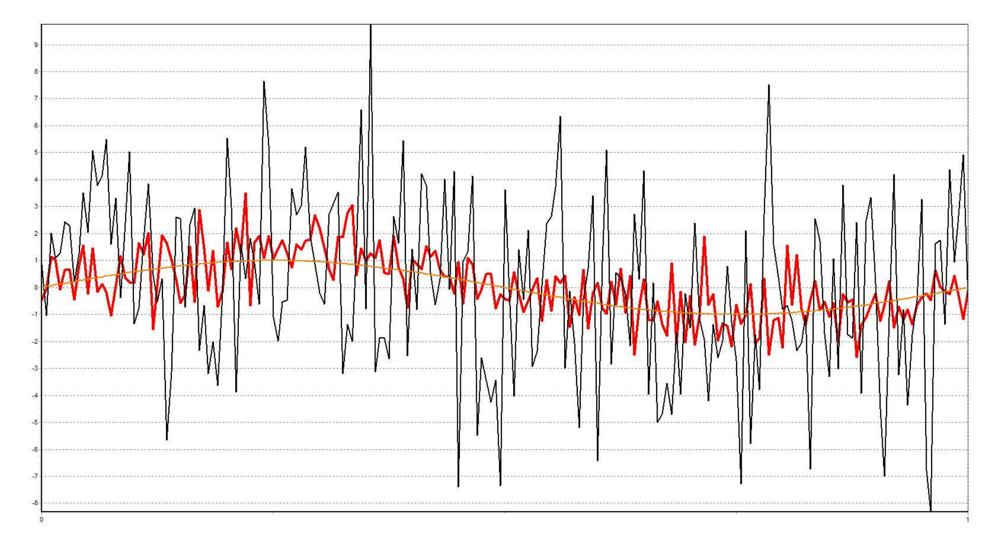

Рис. 7.18: ФХ зашумленного сигнала с ошибками в вычислении коэффициентов (10 пачек). Время построения — 1 усл. ед. вр.

8 Приложение 2

Программная реализация орторекурсивного разложения по системе функций Хаара:

```
function phi(x: Real): Real;
begin
  if (x>=0) and (x<1) then phi:=1 else phi:=0;
end;

function g(x: Real): Real;
begin
g:=1;
end;

function rel(x: Real): Real;
var
  S: Real;
  m, n: Integer;
begin
S:=0;
 for m:=0 to ORRMembCount do
  for n:=0 to Round(IntPower(2, m)) - 1 do
   S:=S+c[Round(IntPower(2, m)) + n] *phi(IntPower(2, m)*x - n);
   Result:=f(x)-S;
end;
```

< ... >

```
for m:=0 to ORRMembCount do
        for n := 0 to Round(IntPower(2, m)) - 1 do
         begin
          pw1:= n/Power(2, m);
          pw2:= (n+1)/Power(2, m);
          c[Round(IntPower(2, m)) + n]:=( Int(rel, pw1, pw2)/Int(g, pw1, pw2) )*
(1+RandG(T, R))+RandG(W, V);
         end;

function Reihe(x: Real): Real;
var
```

```
  S: Real;
  m, n: Integer;
begin
 for m:=0 to ORRMembCount do
  for n := 0 to Round(IntPower(2, m))  - 1 do
  S:=S+c[Round(IntPower(2, m)) + n]*phi(Power(2, m) *x - n);
  Result:=S;
end;
```

Реализация орторекурсивного разложения по системе всплесков Хаара:

```
function khi(x: Real; m, n: Integer): Real;
var
  p1, p2, p3: Real;
begin
 p1:=2*n/IntPower(2, m+1);
 p2:=(2*n+1)/IntPower(2, m+1);
 p3:=(2*n+2)/IntPower(2, m+1);
 Result:=0;
  if (x>=p1) and (x<p2) then Result:=-Power(2, m/2);
  if (x>=p2) and (x<p3) then Result:=Power(2, m/2);
end;

function ORHaarrel(x: Real): Real;
var
  S: Real;
  m, n: Integer;
begin
S:=0;
 for m := 0 to ORHaarMembCount - 1 do
  for n := 0 to Round(IntPower(2, m))-1 do
   S:= S+cc[Round(IntPower(2, m))+n]*khi(x, m, n);
   Result:=f(x)-S;
end;

<...>

cc[0]:= int(f, 0, 1);
        cc[0]:=cc[0]*(1+RandG(T, R))+RandG(W, V);
        for m:= 0 to ORHaarMembCount - 1 do
         for n := 0 to Round(IntPower(2, m))-1 do
          begin
           p1:=2*n/IntPower(2, m+1);
           p2:=(2*n+1)/IntPower(2, m+1);
```

```
          p3:=(2*n+2)/IntPower(2, m+1);
          cc[Round(IntPower(2, m))+n]:=( -Power(2, m/2) * Int(ORHaarrel, p1, p2)+
Power(2, m/2) * Int(ORHaarrel, p2, p3) )*(1+RandG(T, R))+RandG(W, V);
         end;

function ORHaarReihe(x: Real): Real;
var
  S: Real;
  m, n: Integer;
begin
S:=cc[0];
 for m:=0 to ORHaarMembCount - 1 do
  for n := 0 to Round(IntPower(2, m))-1 do
   S:=S+cc[Round(IntPower(2, m))+n]*khi(x, m, n);
   Result:=S;
end;
```