Работа

по геометрии на тему

“Симедиана ”

Ученика 10 кл. Ц.О. №218

Зерцалова Андрея

Руководитель: Блинков

Юрий Александрович

Москва 2012 г.

Краткое содержание

В работе рассматривается понятие симедианы.

В отличие от медианы, симедиана не является широко известным геометрическим объектом, однако её рассмотрение вполне естественно, поскольку симметрия относительно биссектрисы – достаточно часто встречающийся прием.

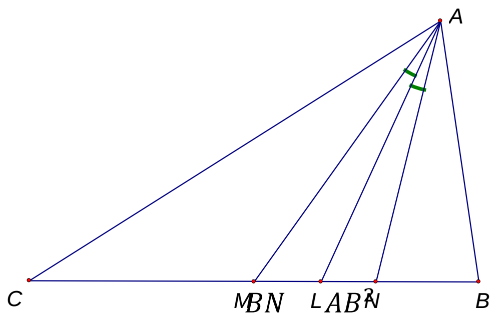
Заметим, что свойства симедианы позволяют находить короткие решения многих трудных задач, в том числе и олимпиадных.

К некоторым задачам приведены различные способы решения. Отметим, что использование таких фактов, как основная задача о симедиане или свойство гармонического четырехугольника, приводит к существенному упрощению решения.

Для начала, рассмотрим основные теоретические факты, связанные с симедианой. В первую очередь, это, конечно, определения. Симедиану, как и множество геометрических объектов, можно задавать несколькими определениями. В данном случае, обычно используют два, одно из которых раскрывает геометрическую суть симедианы, а второе – её метрические характеристики.

Определение №1: симедиана – чевиана, симметричная медиане, относительно биссектрисы того же угла треугольника.

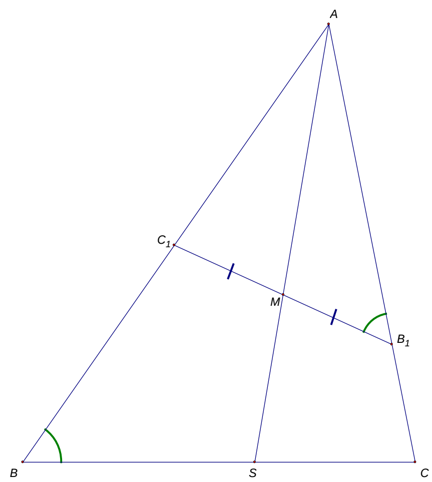
Определение №2: симедиана – чевиана, делящая противоположную сторону в отношении квадратов прилежащих сторон.



$$\frac{BN}{CN}=\frac{AB^2}{AC^2}$$

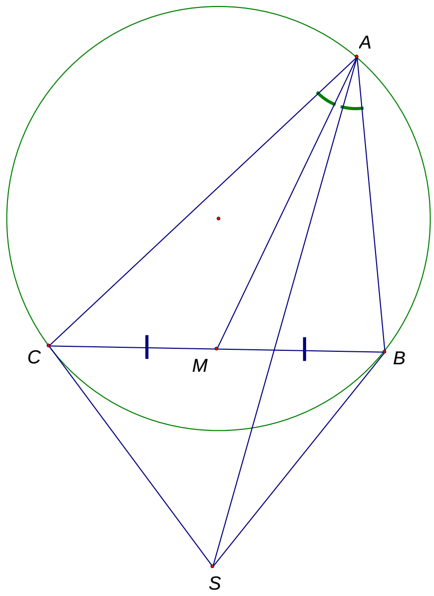
Сформулируем лемму, которая часто используется для решения задач про симедиану

Лемма: В треугольнике проведен отрезок, антипараллельный одной из сторон. Тогда прямые, содержащие медиану большого и симедиану маленького треугольника, совпадают.



Одним из самых известных, но, в то же время, далеко не самым простым из фактов, связанных с симедианой является основная задача о симедиане.

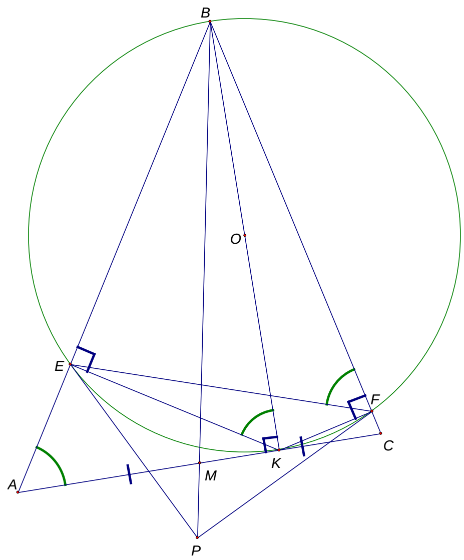
Основная задача: прямая, содержащая симедиану треугольника проходит через точку пересечения касательных из двух его вершин к описанной окружности треугольника.



На примере следующей задачи, решение которой без использования основной задачи о симедиане является весьма сложным, мы видим, что использование данного факта сильно облегчает её доказательство.

Задача: В остроугольном треугольнике ABC на E и F - проекции основания высоты на стороны. К окружности вокруг треугольника BEF в точках E и F проведены касательные. Требуется доказать, что их точка пересечения лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC.

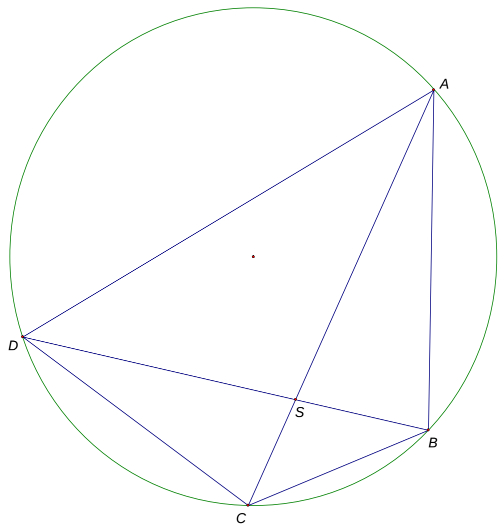
Решение: заметим, что BP содержит симедиану BEF, а EF антипараллельна AC. Таким образом прямые BM и BP совпадают.



Известной конструкцией, в которой также активно используется симедиана является гармонический четырехугольник.

Определение: Вписанный в окружность четырехугольник называется гармоническим, если произведения его противоположных сторон равны.

Свойство: диагонали гармонического четырехугольника являются симедианами.

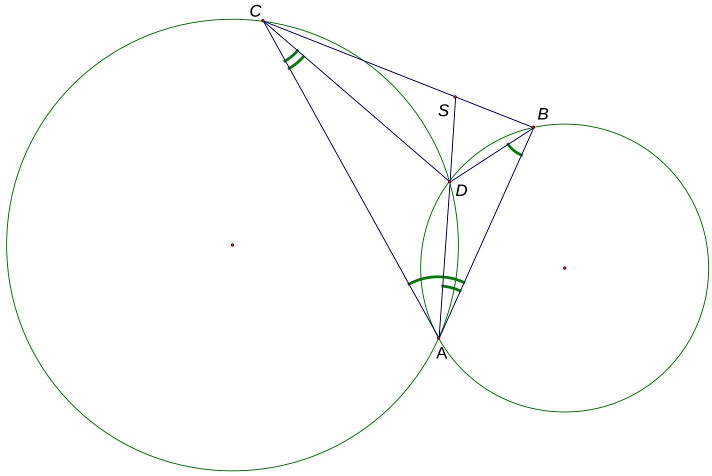


Часто используется лемма, которая связывает симедиану с гармоническим четырехугольником и помогает эффективно использовать данное понятие и его свойства при решении различных задач.

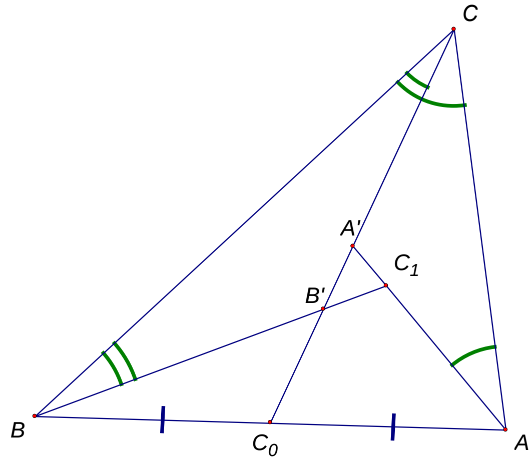
Лемма: если во вписанном четырехугольнике одна диагональ является симедианой, то он гармонический.

Помимо упрощения решения задач, использования свойств симедианы позволяет увидеть эквивалентность конструкций в различных задачах, как например, в двух следующих.

Задача №1: Окружность S_1 проходит через точки A и B и касается прямой AC, окружность S_2 проходит через точки A и C и касается прямой AB. Докажите, что общая хорда этих окружностей является симедианой треугольника ABC.

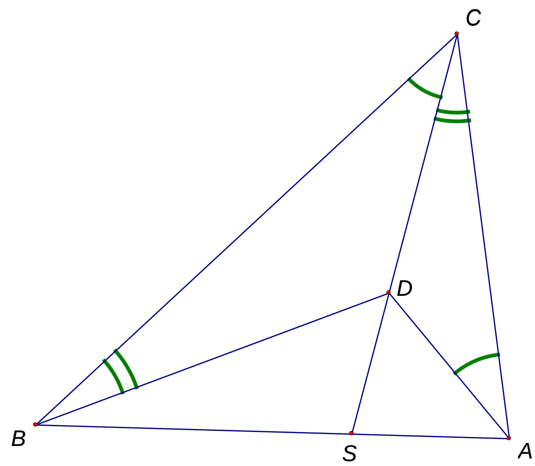


Задача №2: Пусть CC_0 – медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A' и B' соответственно, прямые AA' и BB' пересекаются в точке C_1. Докажите, что CC_1 – симедиана треугольника ABC.



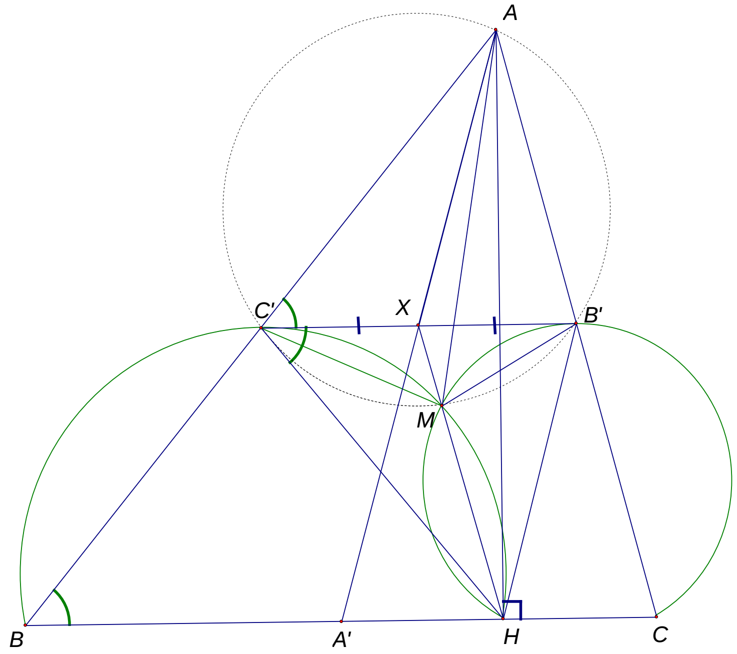
Данные задачи можно решать, используя другие ключевые понятия, например, гармонический четырехугольник. Также хочу подчеркнуть, что при решении данной задачи был доказан весьма важный факт о симедиане.

Важный факт: в треугольнике ABC точка D удовлетворяет следующим условиям: $\angle DAC = \angle DCB$, $\angle DBC = \angle DCA$; тогда и только тогда, когда прямая CD содержит симедиану треугольника ABC.

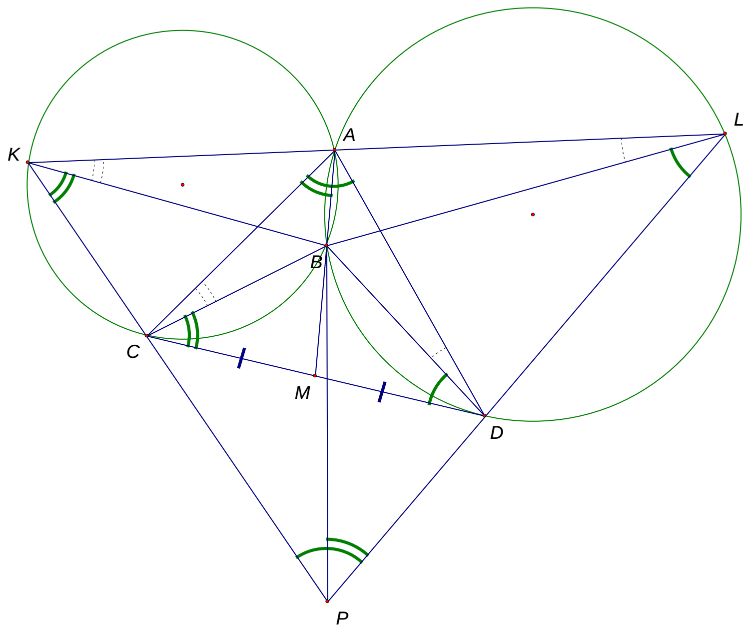


Помимо эквивалентности симедиана может помочь понять обобщение одной задачи другой. Так, из двух следующих задач, придуманных в разное время разными людьми, вторая, является обобщением первой.

Задача №1: Точки A', B' и C' — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, а AH — его высота. Окружности, описанные около треугольников BHC' и CHB' проходят через точку M, отличную от H. Докажите, что $\angle BAM = \angle CAA'$.



Задача №2: К двум окружностям $w1$ и $w2$, пересекающимся в точках A и B, проведена их общая касательная CD (C и D — точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD, чем A). Прямая, проходящая через A, вторично пересекает $w1$ и $w2$ в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P. Докажите, что PB — симедиана треугольника KPL.



Оглавление:

Введение

В работе рассматривается понятие симедианы.

В отличие от медианы, симедиана не является широко известным геометрическим объектом, однако её рассмотрение вполне естественно, поскольку симметрия относительно биссектрисы – достаточно часто встречающийся прием.

Заметим, что свойства симедианы позволяют находить устные решения многих трудных задач, в том числе и олимпиадных.

В первой части работы вводятся два возможных определения симедианы и доказывается их эквивалентность. Далее приводятся примеры задач, для решения которых достаточно только определения.

Во второй части рассматривается ключевой факт, связанный с симедианой и задачи на его применение.

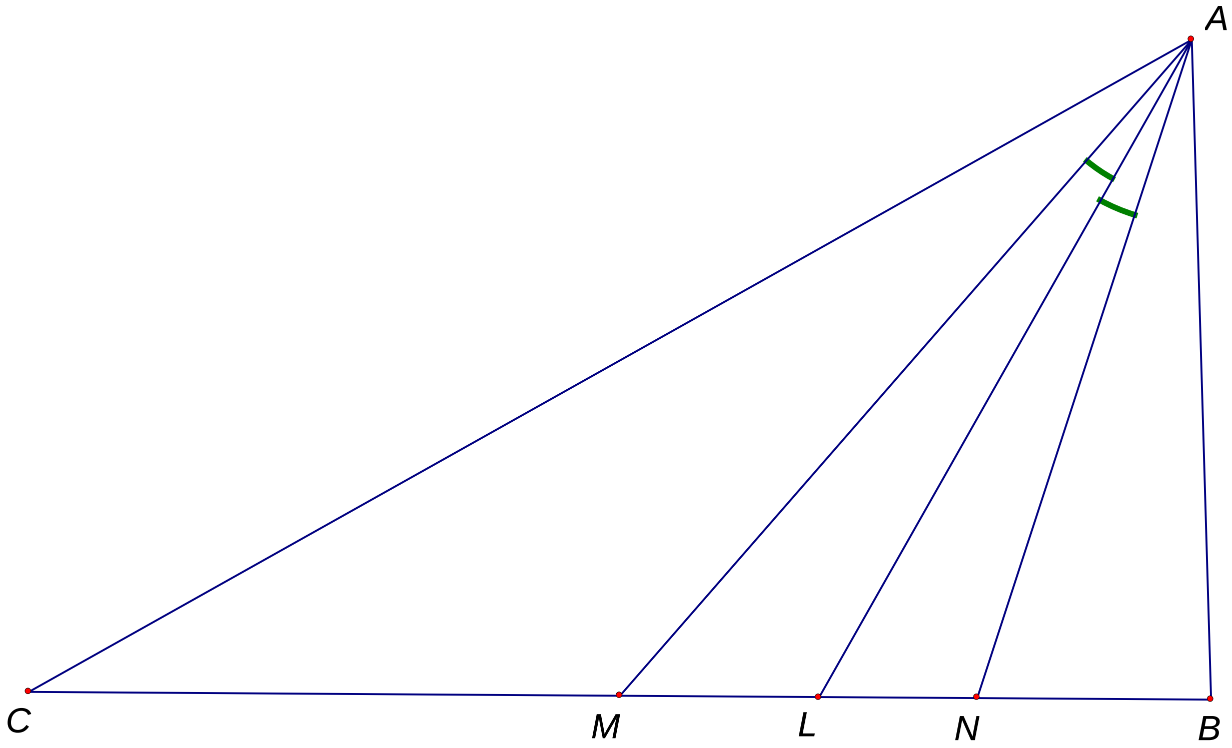
И, наконец, в третьей части речь пойдет о гармоническом четырехугольнике и его связи с понятием симедианы.

К некоторым задачам приведены различные способы решения. Отметим, что использование таких фактов, как основная задача о симедиане или свойство гармонического четырехугольника, приводит к существенному упрощению решения.

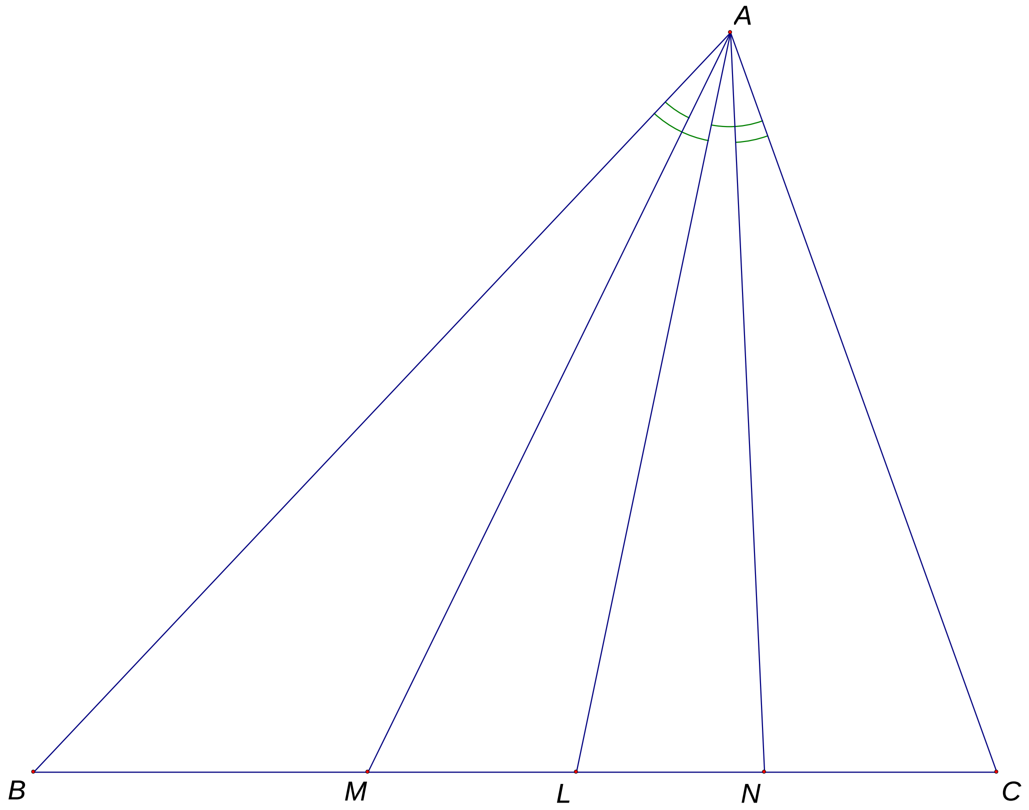
Часть I. Определение симедианы

1.1 Определения и их эквивалентность

А) Рассмотрим треугольник ABC, его медиану AM и биссектрису AL. Пусть прямая AN симметрична прямой AM относительно прямой AL (N лежит на отрезке BC). Тогда отрезок AN называется **симедианой** треугольника ABC.



Б) Точка N лежит на стороне BC треугольника ABC. Отрезок AN является симедианой треугольника ABC тогда и только тогда, когда $\frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$.



Рассмотрим вспомогательное утверждение: **пусть прямые AM и AN симметричны относительно биссектрисы угла A треугольника ABC (точки M и N лежат на прямой BC), тогда $\frac{BM \cdot BN}{CN \cdot CM} = \frac{AB^2}{AC^2}$.**

Доказательство:

Пусть $\angle BAM = \angle CAN = \alpha, \angle MAN = \beta, \angle BMA = x, \angle CNA = y$.

Запишем теорему синусов: $\frac{BA}{\sin x} = \frac{BM}{\sin \alpha}$ (для $\triangle BAM$); $\frac{CA}{\sin y} = \frac{CN}{\sin \alpha}$(для $\triangle CAN$); $\frac{BN}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{BA}{\sin(180°-y)} = \frac{BA}{\sin y}$(для $\triangle BAN$); $\frac{CM}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{CA}{\sin(180°-x)} = \frac{CA}{\sin x}$ (для $\triangle CAM$)

Таким образом, $BM = \frac{BA \cdot \sin \alpha}{\sin x}, BN = \frac{BA \cdot \sin(\alpha+\beta)}{\sin y}, CN = \frac{CA \cdot \sin \alpha}{\sin y}, CM = \frac{CA \cdot \sin(\alpha+\beta)}{\sin x}$.

Следовательно, $\frac{BM \cdot BN}{CN \cdot CM} = \frac{\frac{BA \cdot \sin \alpha}{\sin x} \cdot \frac{BA \cdot \sin(\alpha+\beta)}{\sin y}}{\frac{CA \cdot \sin \alpha}{\sin y} \cdot \frac{CA \cdot \sin(\alpha+\beta)}{\sin x}} = \frac{BA \cdot BA \cdot \sin \alpha \cdot \sin y \cdot \sin(\alpha+\beta) \cdot \sin x}{CA \cdot CA \cdot \sin \alpha \cdot \sin x \cdot \sin(\alpha+\beta) \cdot \sin y} = \frac{BA \cdot BA}{CA \cdot CA}$, что и требовалось.

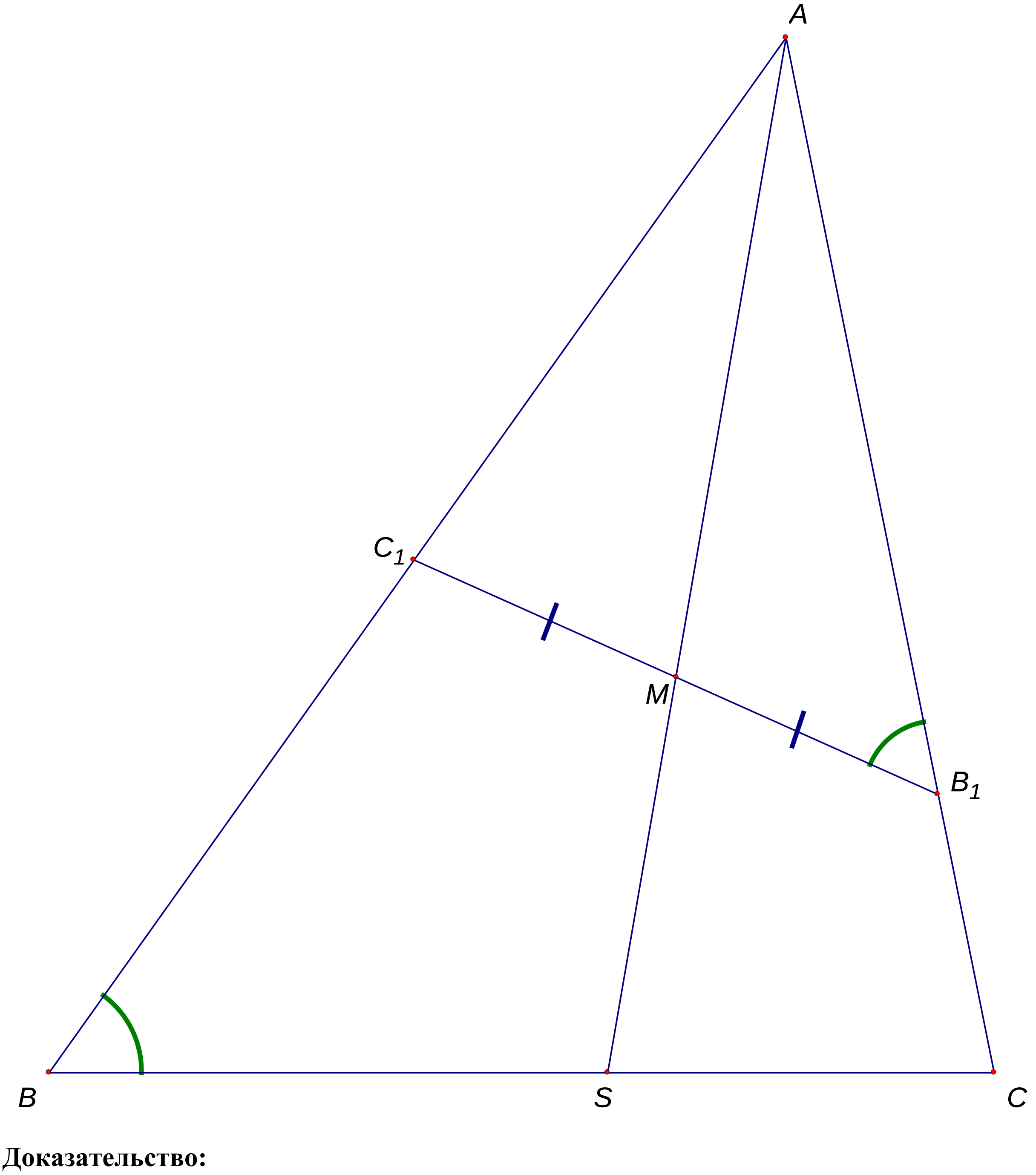
Теперь докажем **эквивалентность** двух определений.

1) Если AN – симедиана, то $BM = MC$, следовательно, $\frac{BN}{CN} = \frac{BM \cdot BN}{CN \cdot CM} = \frac{BA \cdot BA}{CA \cdot CA}$, что и требовалось.

2) Пусть $\frac{BN}{CN} = \frac{BA \cdot BA}{CA \cdot CA}$. С другой стороны, по лемме, $\frac{BN}{CN} = \frac{BM \cdot BN}{CN \cdot CM}$, то есть $BM = MC$. Следовательно, отрезок, симметричный AN относительно AL является медианой. Таким образом, эти определения эквивалентны.

1.2 Симедиана и антипараллельность

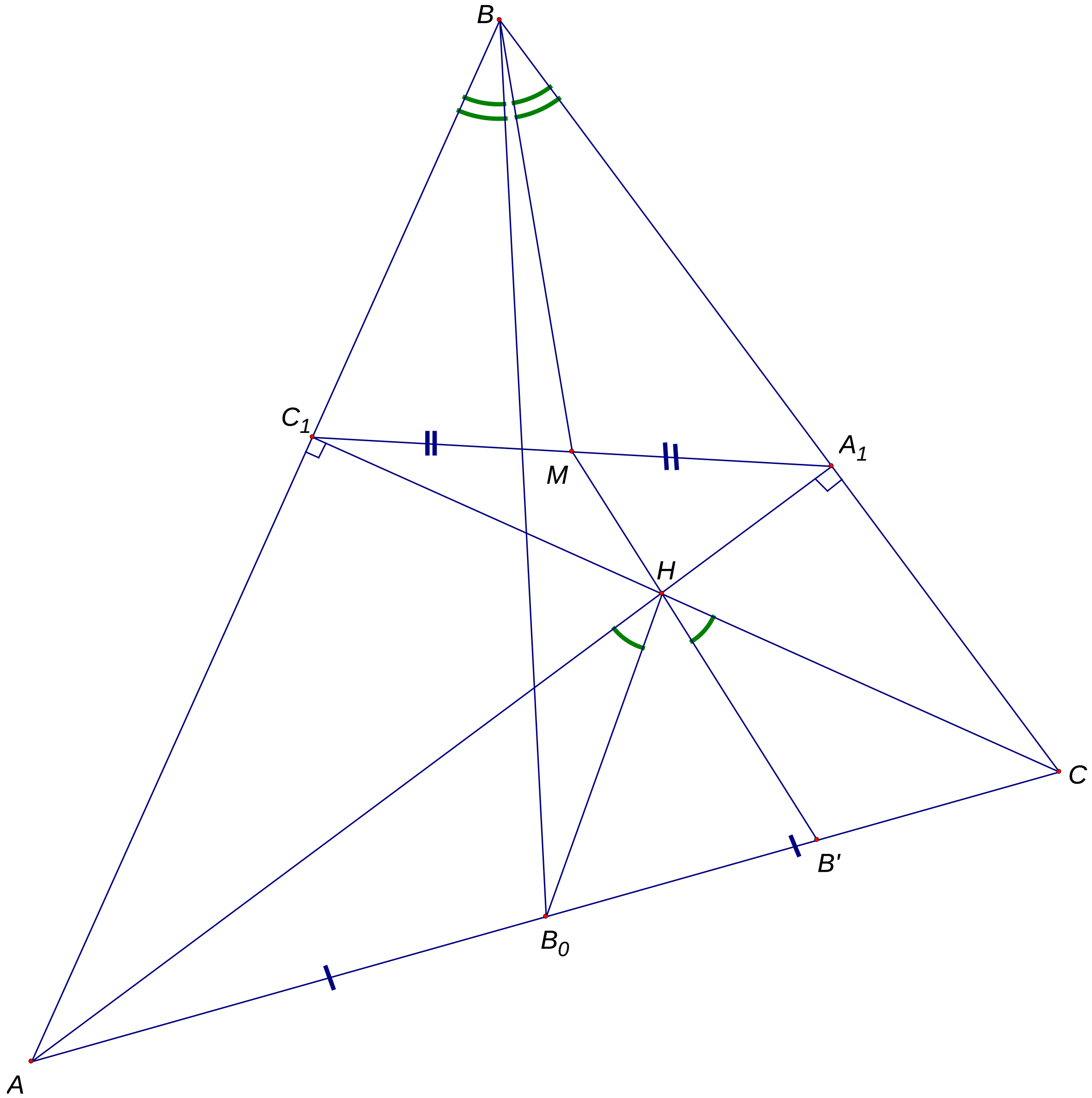
1.2.1 В треугольнике ABC проведен отрезок B_1C_1, антипараллельный стороне BC, с концами на сторонах ABи AC соответственно. Докажите, что отрезок AS ($S\in[BC]$) является симедианой треугольника т. и т. т., когда он, пересекая отрезок B_1C_1, делит его пополам.



Доказательство:

Рассмотрим симметрию относительно биссектрисы угла A. Образы точек B_1 и C_1 принадлежат прямым AB и AC соответственно, причем полученный отрезок параллелен прямой BC. Следовательно, его середина лежит на медиане треугольника ABC тогда и только тогда, когда AS – симедиана (по **первому определению**).

1.2.2 ***(Московская математическая олимпиада 2008)*** Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка B_0 – середина стороны AC . Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A_1C_1.

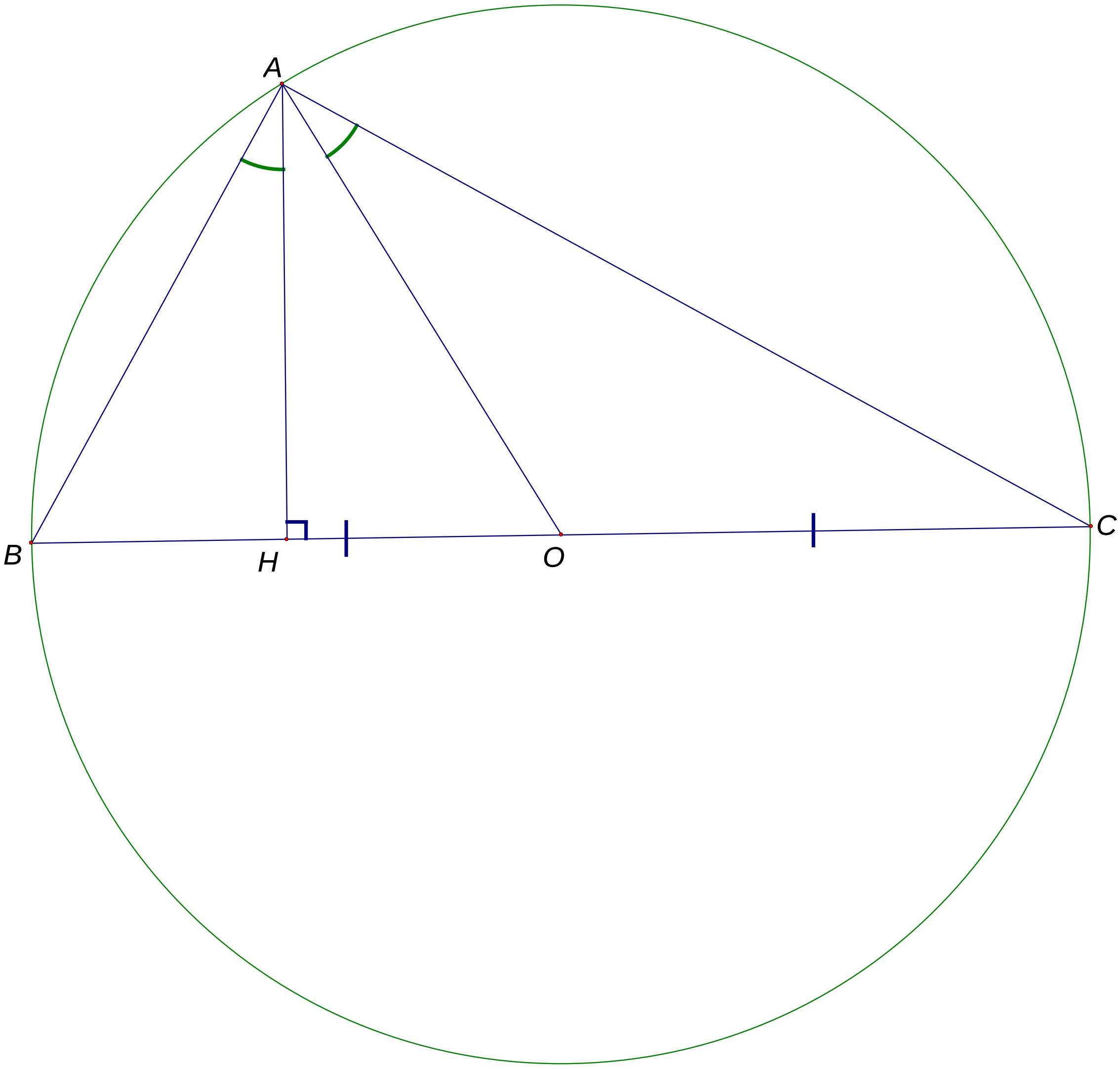


Доказательство:

Заметим, что A_1C_1 – отрезок, антипараллельный BC. Из **задачи №1.2.1** следует, что прямая, симметричная BB_0 относительно BL проходит через середину A_1C_1 (точку M). Аналогично, прямая, симметричная HB_0, относительно биссектрисы угла AHC, проходит через точку M.

1.3 Симедиана и ортоизогональ

1.3.1 Докажите, что в неравнобедренном треугольнике одна из симедиан совпадает с высотой т. и т. т., когда этот треугольник – прямоугольный.



Доказательство:

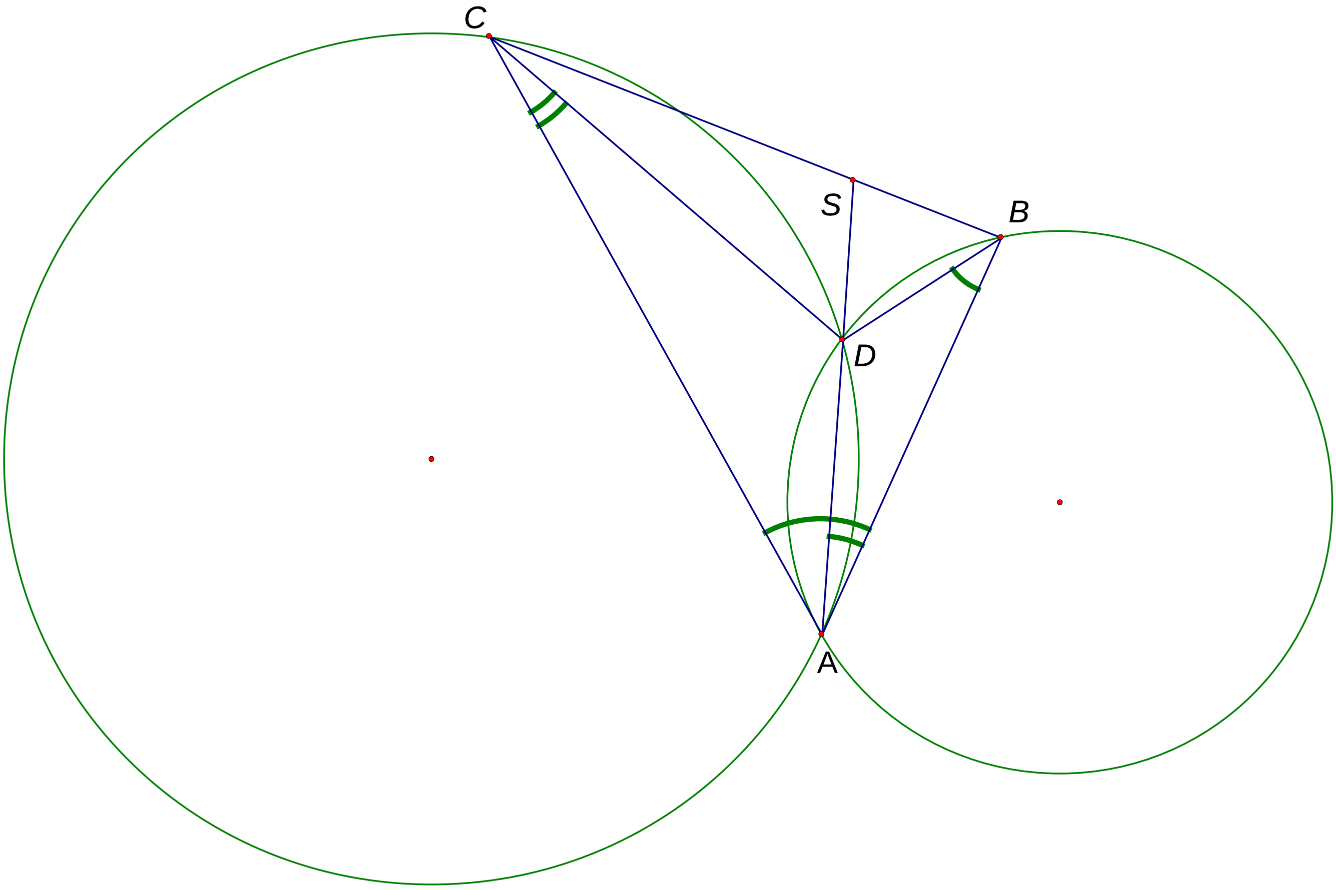
Воспользуемся следующим фактом: **пусть $\boldsymbol{O}$ – центр описанной окружности треугольника $\boldsymbol{ABC}$, $\boldsymbol{H}$– ортоцентр, тогда $\boldsymbol{\angle BAH = \angle CAO}$.**

1) Пусть AH также является симедианой, тогда O (центр описанной окружности) лежит на медиане (Так как $\angle CAO = \angle BAH = \angle CAM$). Таким образом, если ABC неравнобедренный треугольник, то O – середина BC, следовательно, BAH – прямоугольный треугольник.

2) Пусть треугольник BAC – прямоугольный, с гипотенузой BC и медианой AO. Заметим, что $\angle OAC = \angle ACO$. Таким образом, если провести симедиану AH, то $\angle BAH = \angle OAC = 90° - \angle ABH$.Следовательно, угол AHB – прямой, то есть AH является ещё и высотой треугольника.

1.4 Симедиана и подобие

1.4.1 А) Окружность S_1 проходит через точки A и B и касается прямой AC, окружность S_2 проходит через точки A и C и касается прямой AB. Докажите, что общая хорда этих окружностей является симедианой треугольника ABC.



Доказательство:

Докажем, что $\frac{BS}{SC} = \frac{AB^2}{AC^2}$ (см. **второе определение симедианы**).

Заметим, что DS – биссектриса угла CDB, то есть $\frac{BS}{SC} = \frac{BD}{CD}$. Из подобия треугольников CDA и ADB (по двум углам) получим, что $\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD} = \frac{BA}{CA}$. Следовательно, $\frac{BD}{CD} = \frac{AD \cdot BD}{CD \cdot AD} = \frac{BA \cdot BA}{CA \cdot CA}$, что и требовалось.

Б) *(Всероссийская олимпиада по геометрии 2008)* Пусть CC_0 – медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A' и B' соответственно, прямые AA' и BB'пересекаются в точке C_1. Докажите, что CC_1 – симедиана треугольника ABC.

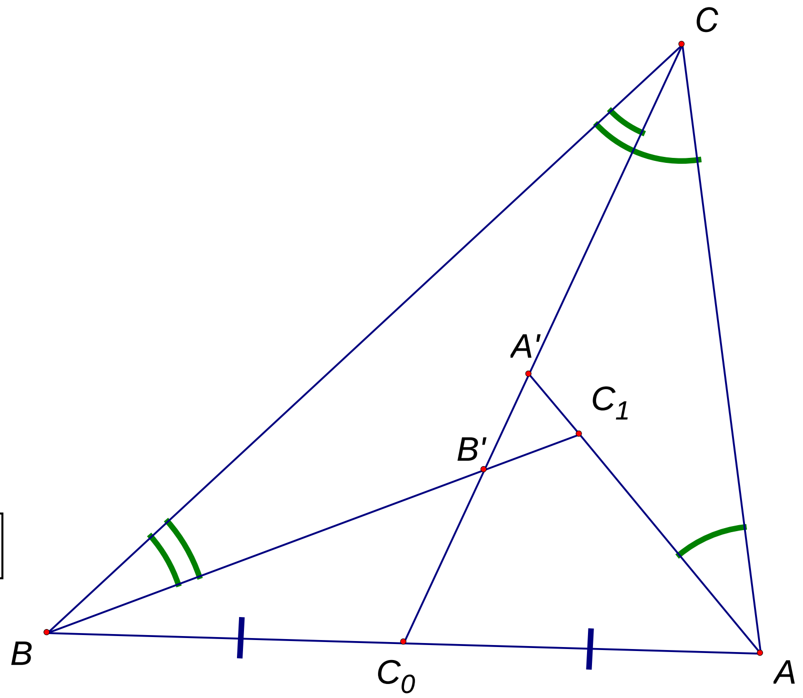


Рис. 1

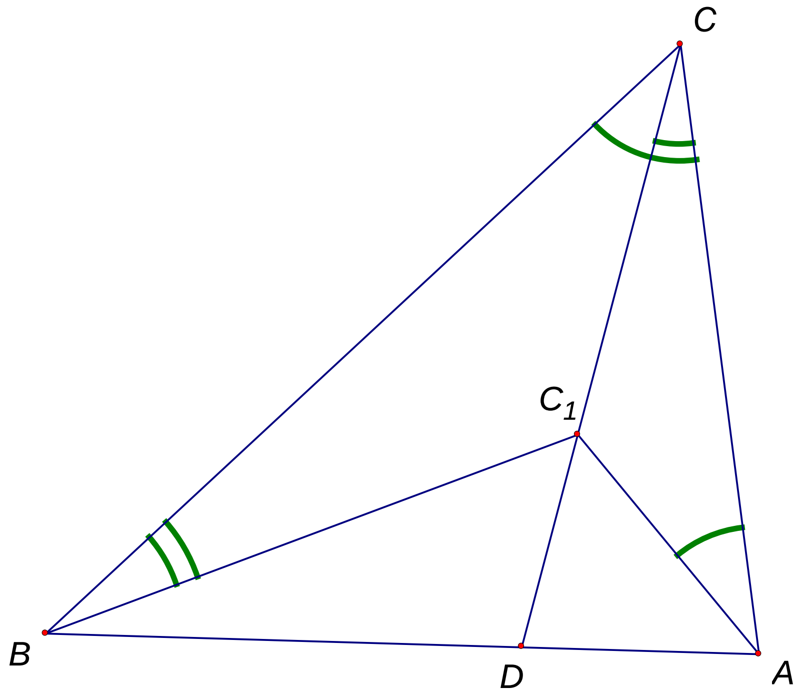


Рис. 2

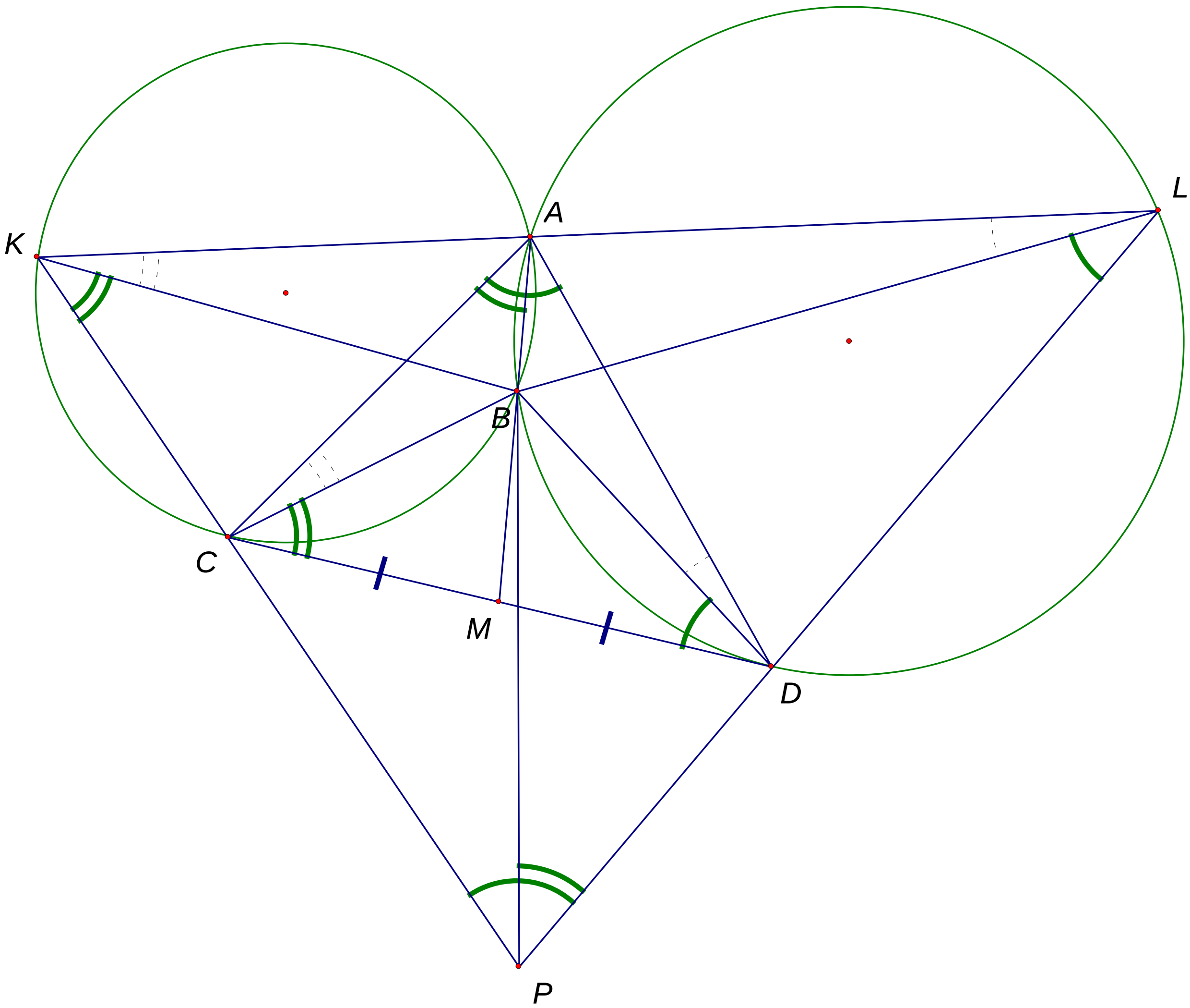
Доказательство:

1) **Рассмотрим рис. 1.** То, что A' лежит на серединном перпендикуляре к AC равносильно тому, что треугольник $CA'A$ – равнобедренный. Из этого следует, что $\angle A'CA = \angle A'AC$. Проведем симедиану CD (см.**рис.2**). Следовательно, $\angle BCD = \angle CAC_1$. Аналогично, $\angle ACD = \angle CBC_1$.

2) **Рассмотрим рис. 2.** Заметим, что точка C_1 в данном треугольнике аналогична точке D в треугольнике ABC из предыдущего пункта. Таким образом, прямая CC_1 содержит симедиану треугольника ABC. Что и требовалось.

1.5 Симедиана и изогональное сопряжение

1.5.1 ***(Московская устная олимпиада по геометрии 2009)*** К двум окружностям w_1 и w_2, пересекающимся в точках A и B, проведена их общая касательная CD (C и D — точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD, чем A). Прямая, проходящая через A, вторично пересекает w_1 и w_2 в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P. Докажите, что PB— симедиана треугольника KPL.



Доказательство:

1) Докажем, что $\triangle CAD \sim \triangle KPL$. Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle PKL = \angle ACD$, а $\angle PLK = \angle ADC$. Таким образом, треугольники подобны по двум углам.

2) Продлим общую хорду AB до пересечения с общей касательной (точка M). Точка M будет серединой отрезка CD.

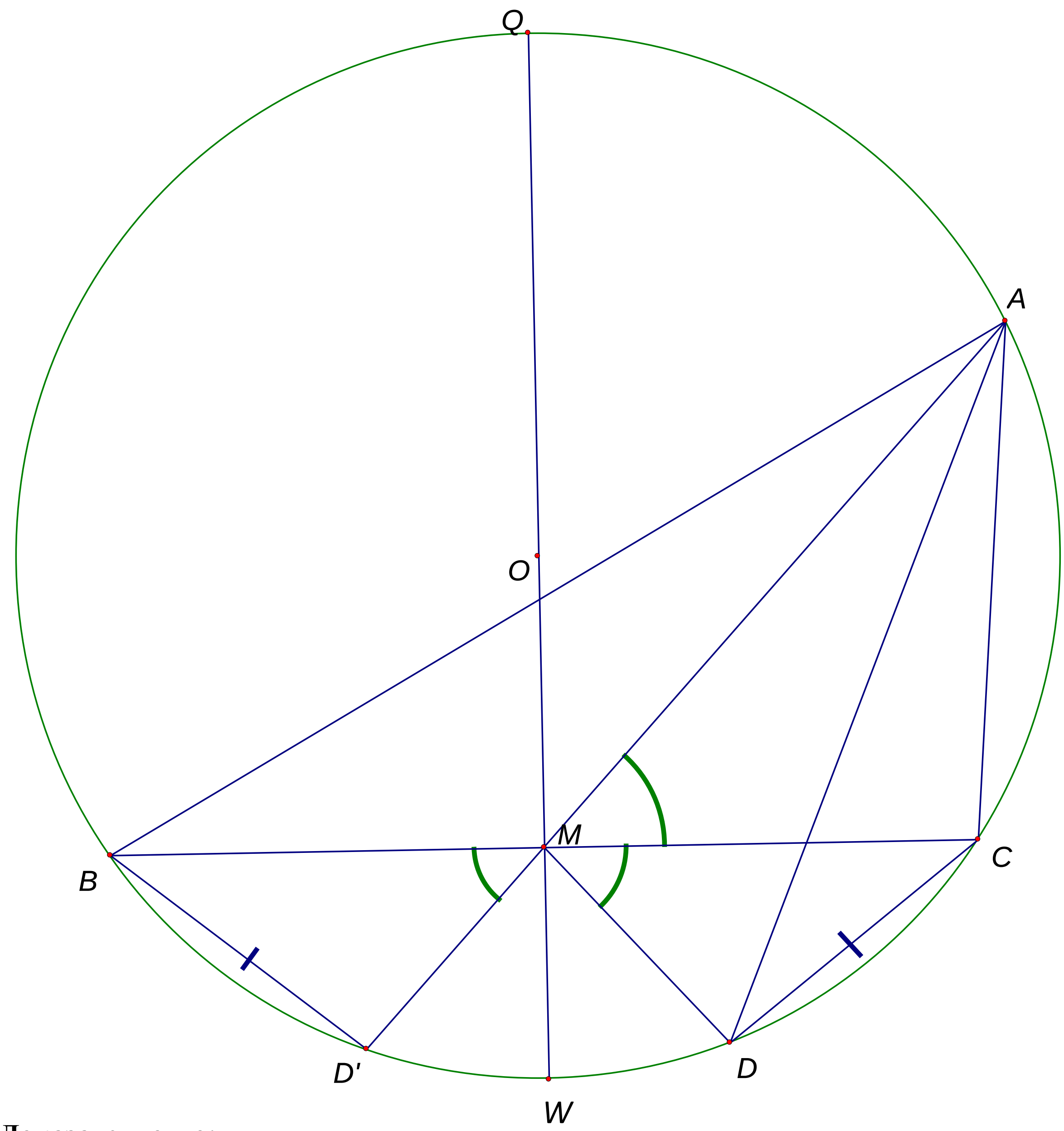
3) Так как треугольники подобны, то если провести медиану PM' треугольника PKL, то $\angle KPM' = \angle CAM$. Заметим, что, если доказать равенство углов BPL и CAM, то угол BPL будет равен углу KPM', то есть PB – симедиана треугольника KPL (по **первому определению**). Известно, что $\angle CAM = \angle BCD$. Таким образом, нужно доказать, что четырехугольник $CBDP$ – вписанный. Рассмотрим треугольник PKL: $\angle KPL = 180° - \angle PKB - \angle BKL - \angle PLB - \angle BLK = 180° - \angle BCD - \angle BDC - \angle ACB - \angle ADB = \angle BCD + \angle BDC$. При этом, $\angle CBD = 180° - \angle BCD - \angle BDC$, следовательно, $\angle CBD + \angle CPD = 180°$, что и требовалось.

Часть II. Основная задача

2.1 Симедиана и инверсия

2.1.1 В окружности с центром O проведена хорда BC. Через точку M – середину этой хорды проведен диаметр QW. Лучи MA и MD таковы, что $\angle CMA = \angle CMD < 90°$ (A и D – точки пересечения этих лучей с окружностью лежат в одной полуплоскости относительно прямой QW).

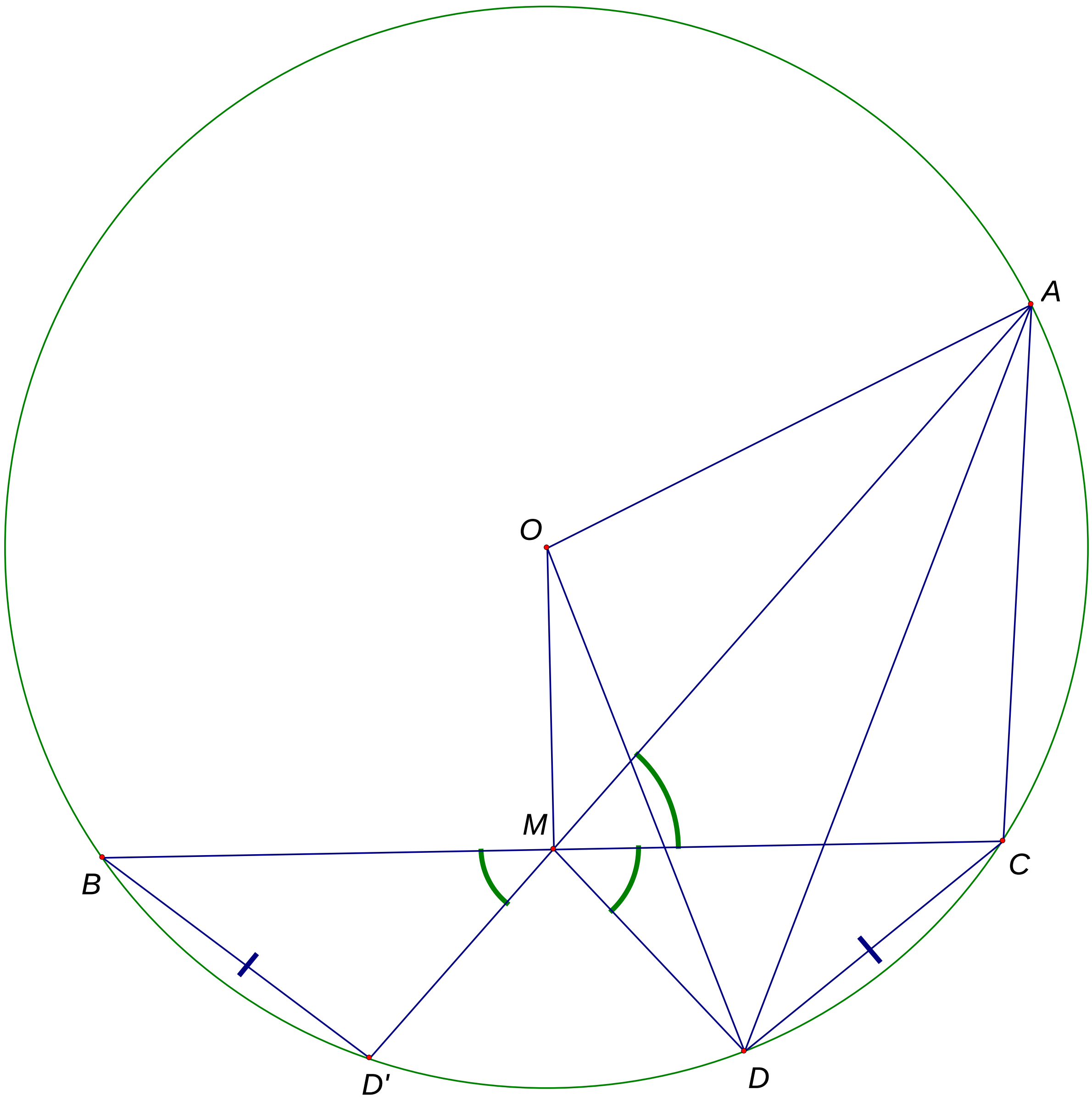
А) Докажите, что одна из симедиан треугольника ABC лежит на прямой AD.



Доказательство:

Докажем, что $\angle BAM = \angle CAD$. Продлим AM до пересечения с окружностью (см.рис). Тогда точки D' и D симметричны относительно диаметра OM. Следовательно, $BD' = CD$, то есть $\angle BAM = \angle CAD$, что и требовалось.

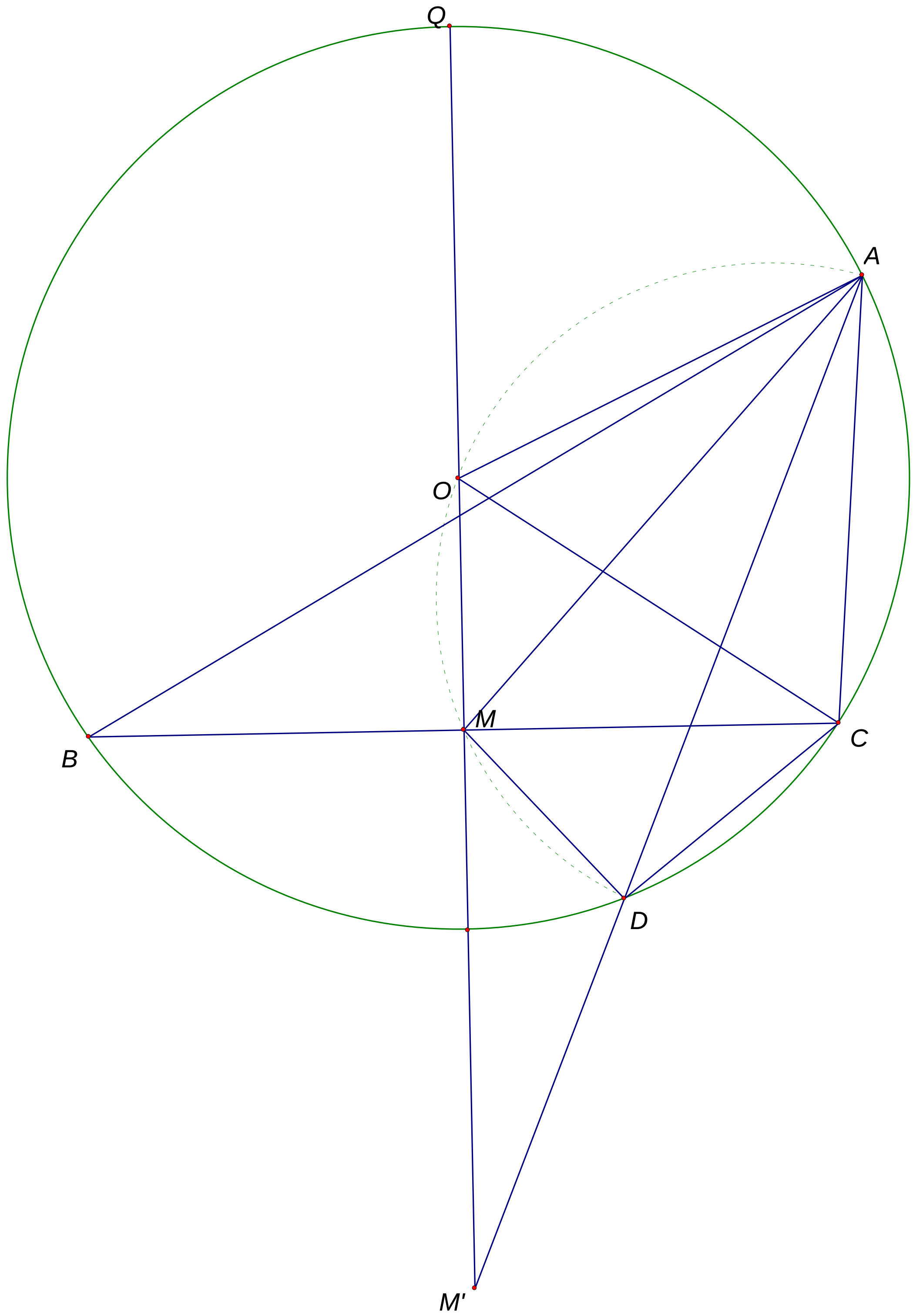
Б) Докажите, что четырехугольник $OMDA$ – вписанный.



Доказательство:

Заметим, что $\angle AMD = 2\angle AMC = \cup AC + \cup BD' = \cup AD = \angle AOD$. Таким образом, $AOMD$ – вписанный четырехугольник.

В) Докажите, что все прямые AD, построенные таким образом, пересекают прямую OM в одной и той же точке P, инверсной M относительно данной окружности.



Доказательство:

Пусть P – образ точки M при инверсии относительно данной окружности (см. рис). Окружность, описанная около четырехугольника $AOMD$, переходит в прямую AD (поскольку точки A и D принадлежат окружности инверсии). Тогда точка P принадлежит прямой AD.

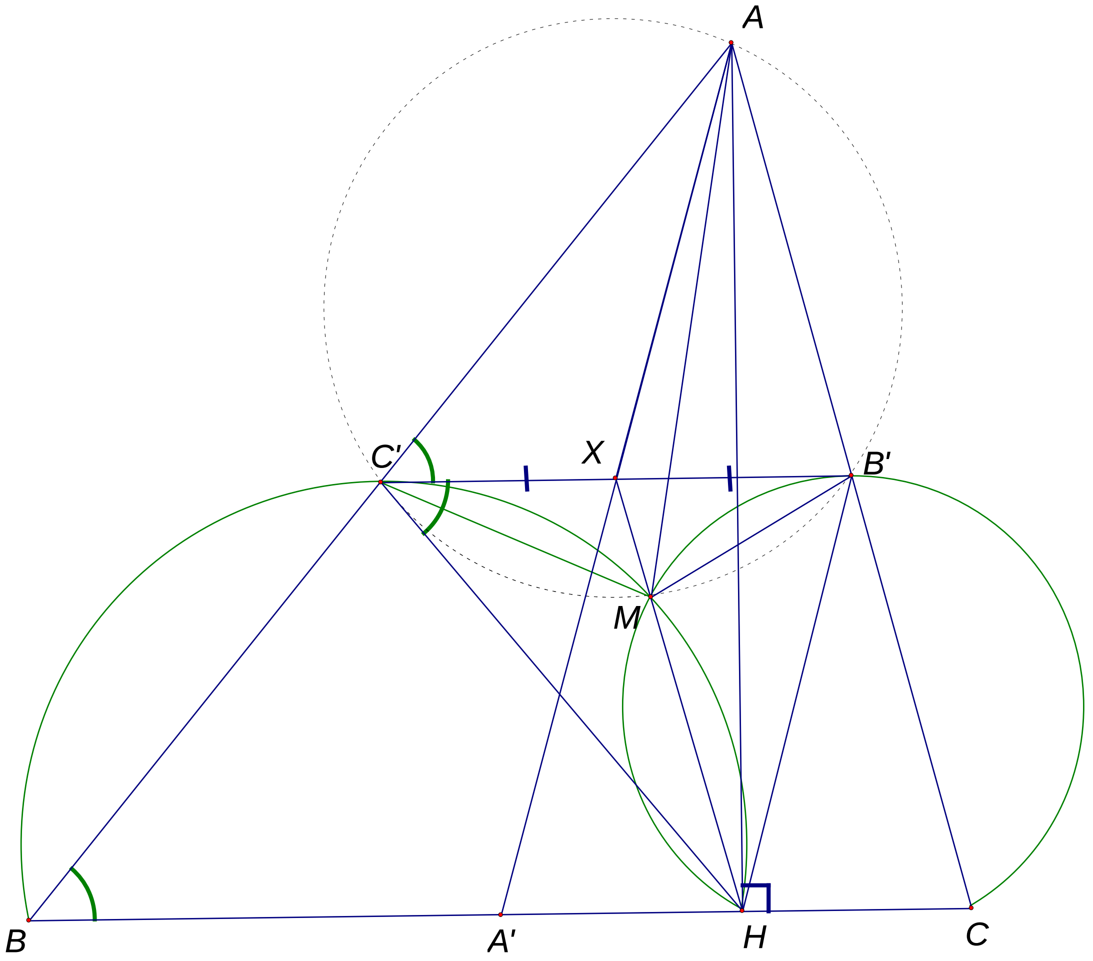
С другой стороны, точка P лежит на прямой OM и не зависит от положения прямой AD. Следовательно, все прямые AD проходят через фиксированную точку P (образ точки M при инверсии относительно данной окружности).

Комментарий: *пункт **В** иногда называют теоремой о симметричной бабочке.*

2.1.2 Точки A', B' и C' — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, а AH — его высота. Окружности, описанные около треугольников BHC' и CHB' проходят через точку M, отличную от H.

А) ***(Международная олимпиада по математике, 1970)*** Докажите, что четырехугольник $AB'MC'$ – вписанный, а прямая MH проходит через середину $C'B'$.

Б) ***(Московская математическая олимпиада 2007)*** Докажите, что $\angle BAM = \angle CAA'$.



Доказательство:

1) Докажем, что $AC'MB'$ – вписанный. Действительно, $\angle AC'M = 180° - \angle BC'M = \angle MHB = 180° - \angle MHC = \angle MB'C = 180° - AB'M$, что и требовалось.

Поскольку мы пользовались только тем, что C', B' и H принадлежат сторонам треугольника, то доказано более общее утверждение: **если взять точки B', C' и A' на сторонах треугольника AC, AB и BC соответственно, то окружности, описанные около треугольников $AB'C'$, $BA'C'$и $CA'B'$ пересекаются в одной точке.**

2) Докажем, что $C'B'$ – общая касательная для окружностей, описанных около треугольников $BC'H$ и $CB'H$.

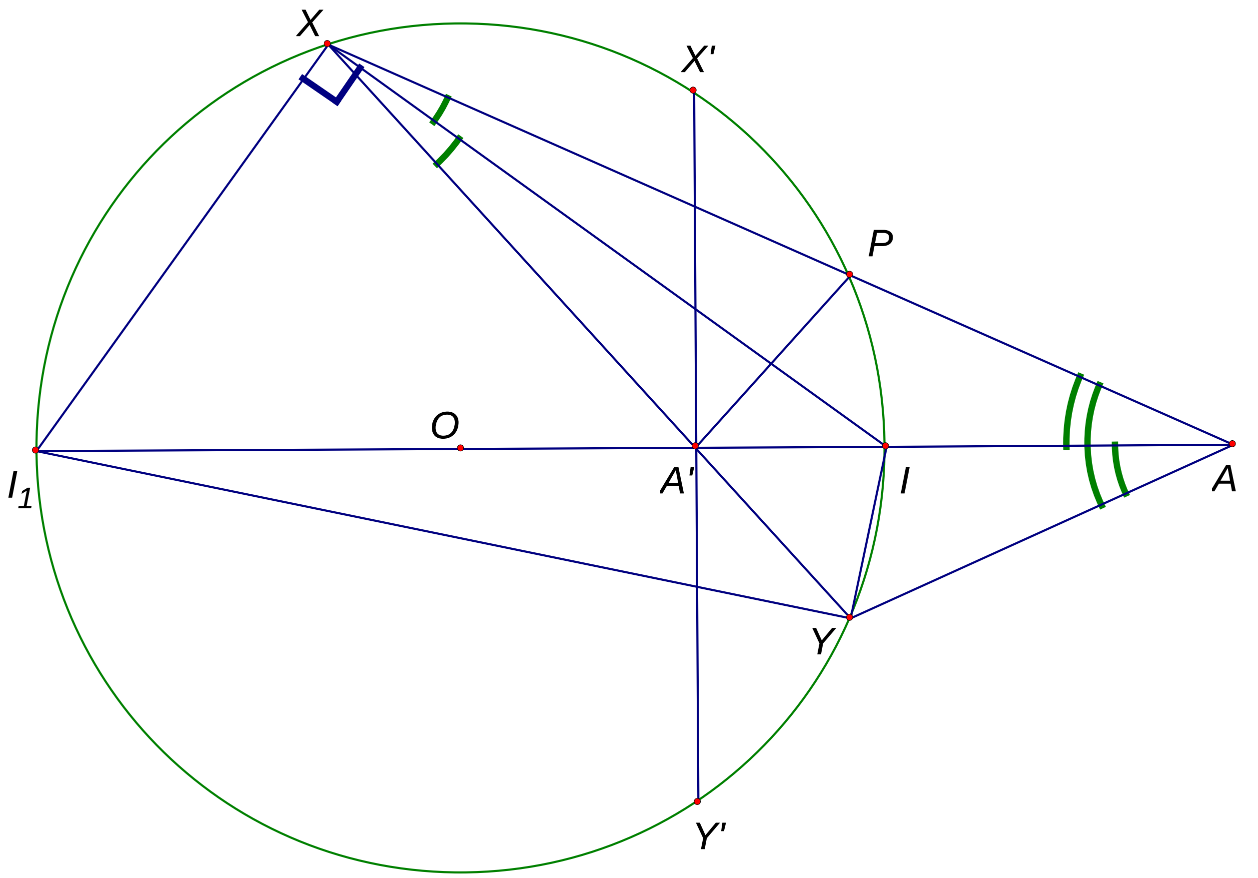
Заметим, что треугольники $AC'B'$ и $B'C'H$ симметричны относительно $C'B'$. Из этого следует, что $\angle HC'B' = \angle B'C'A = \angle B'C'A$. По теореме об угле между касательной и хордой $C'B'$ – касательная к окружности, описанной около треугольника $BC'H$. Для окружности описанной около $CB'H$ доказательство аналогично.

3) MH – общая хорда, следовательно прямая MH пересекает общую касательную $C'B'$ в середине отрезка $C'B'$. Таким образом, **пункт А)** доказан.

4) Теперь рассмотрим окружность, описанную около четырехугольника $AC'MB'$: X – середина хорды $C'B'$, лучи XM и XA симметричны относительно $C'B'$. Из **Задачи №2.1.1(А)**

следует, что AM – симедиана в треугольнике $AC'B'$, а следовательно, и в треугольнике ABC, так как эти треугольники гомотетичны с центром A.

2.1.3 Точки A и A' инверсны относительно окружности ω, причем A' – внутри ω. Через A' проводятся хорды XY. Докажите, что центры вписанной и одной из вневписанных окружностей треугольника AXY – фиксированы.



Доказательство:

Пусть I – точка пересечения AA' с окружностью, а $X'Y'$ – хорда, проходящая через A', перпендикулярная диаметру.

1) Из **задачи №2.1.1** следует, что XP – симедиана в треугольнике $XX'Y'$, а XA'– медиана, следовательно точки P и Y симметричны относительно прямой OA. Таким образом, AI – биссектриса в треугольнике AXY.

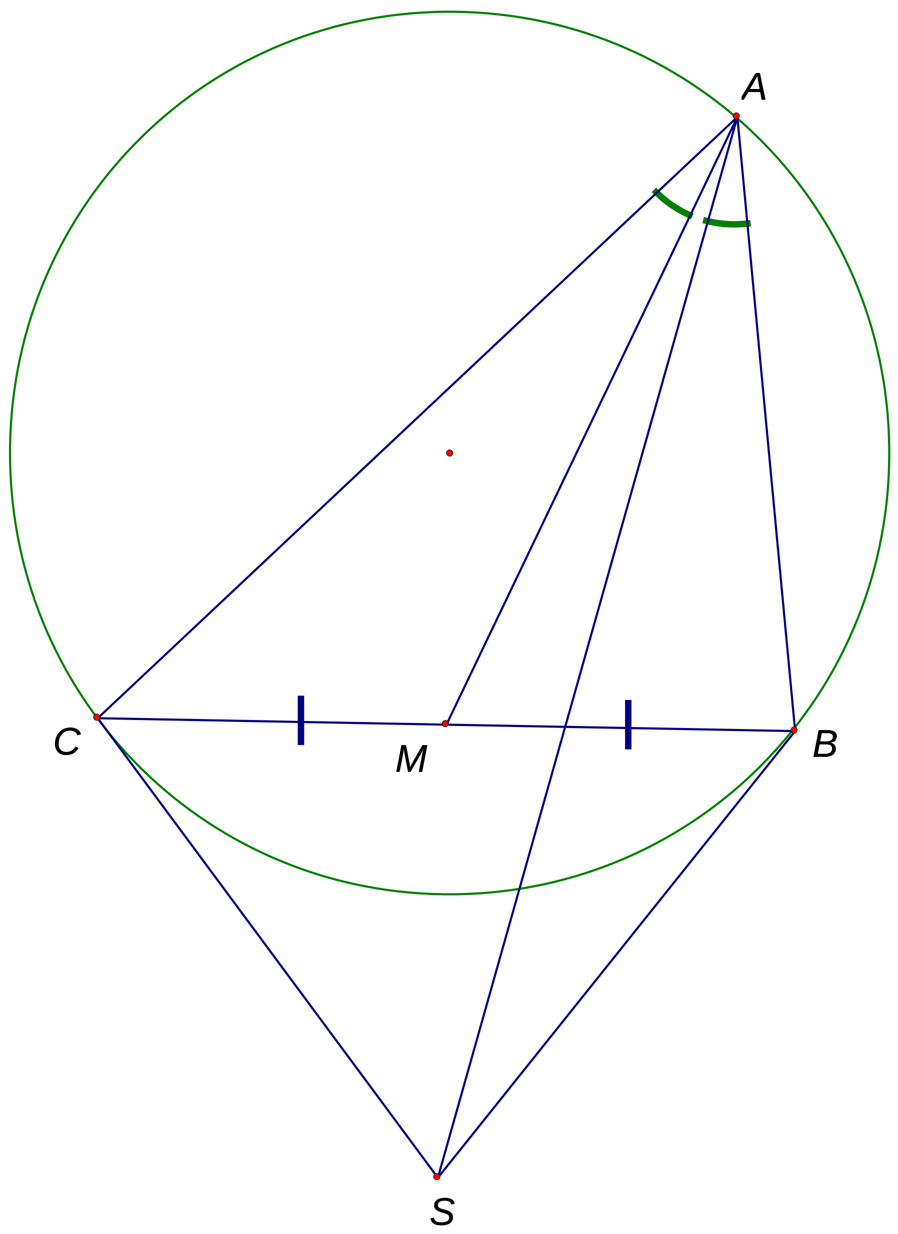
2) Заметим, что I – точка пересечения двух биссектрис в треугольнике AXY, следовательно I – инцентр данного треугольника.

3) Рассмотрим I_1, диаметрально противоположную I. $\angle I_1XI = 90°$, следовательно XI_1 – биссектриса внешнего угла треугольника AXY, а AA' – биссектриса внутреннего угла. Таким образом, I_1– точка пересечения биссектрис внешнего и внутреннего углов треугольника, то есть I_1 – центр вневписанной окружности треугольника AXY.

2.2 Основная задача и её применение

Основная задача о симедиане

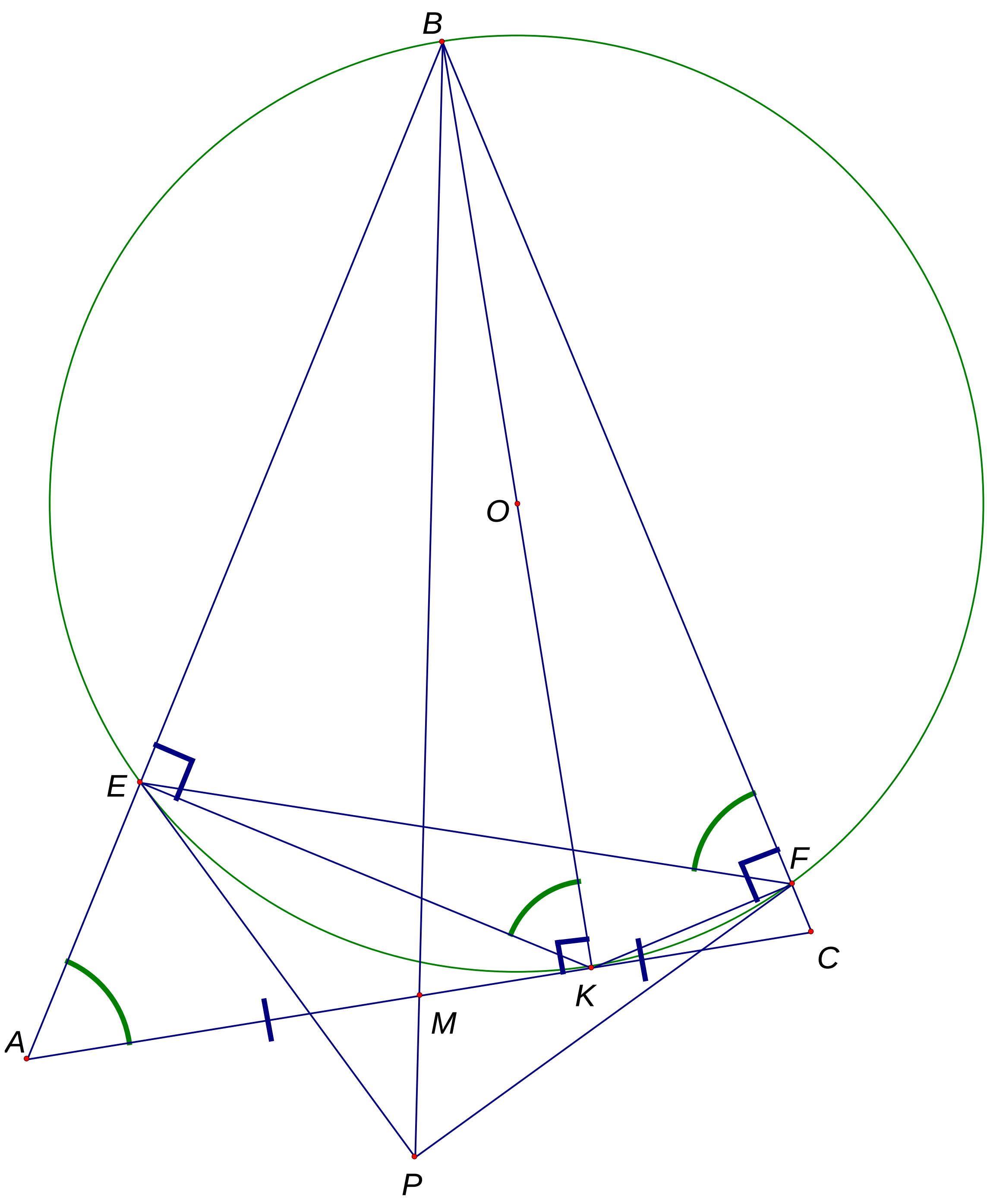
Треугольник ABC вписан в окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке S. Докажите, что прямая AS содержит симедиану треугольника ABC.



Доказательство:

Поскольку SC и SB – касательные, то точки M (середина хорды CB) и S инверсны. Из **задачи №2.1.1**, следует, что прямая, содержащая симедиану треугольника ABC проходит через точку S, что и требовалось.

2.2.1 ***(Всероссийская олимпиада по математике 1995, 4 этап)*** В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK, как на диаметре, построена окружность S, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности S в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC, проведённую из вершины B.

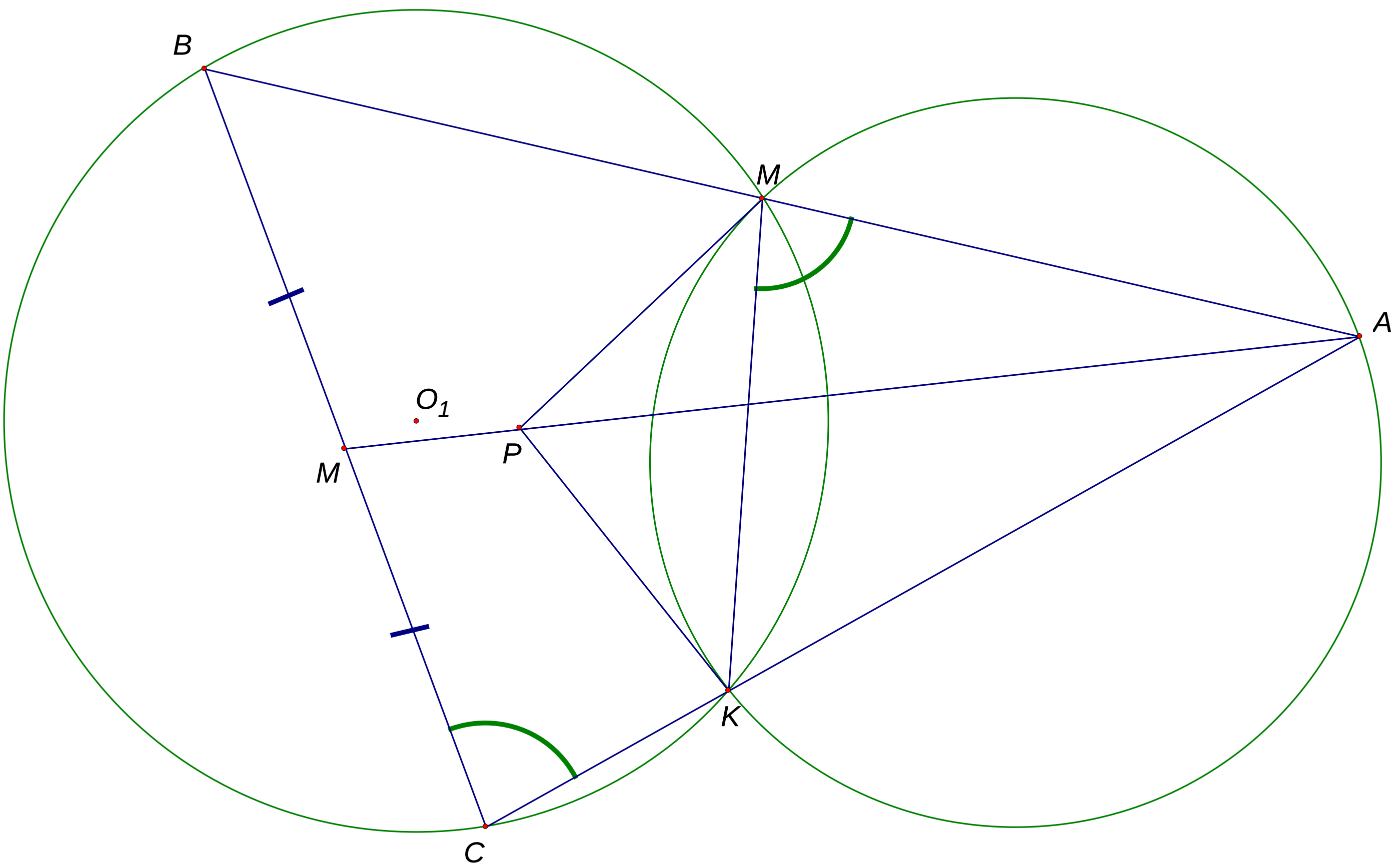


Доказательство:

Из основной задачи следует, что PB – симедиана в треугольнике BEF. Тогда достаточно доказать, что EF антипараллель к AC (см. **задачу №1.2.1**).

Действительно, $\angle BAK = \angle EKB$ (это острые углы в двух прямоугольных треугольниках BAK и BKA с общим углом ABK), $\angle EFB = \angle EKB$ (четырехугольник $BEKF$ – вписанный), значит $\angle BAC = \angle EFB$, что и требовалось.

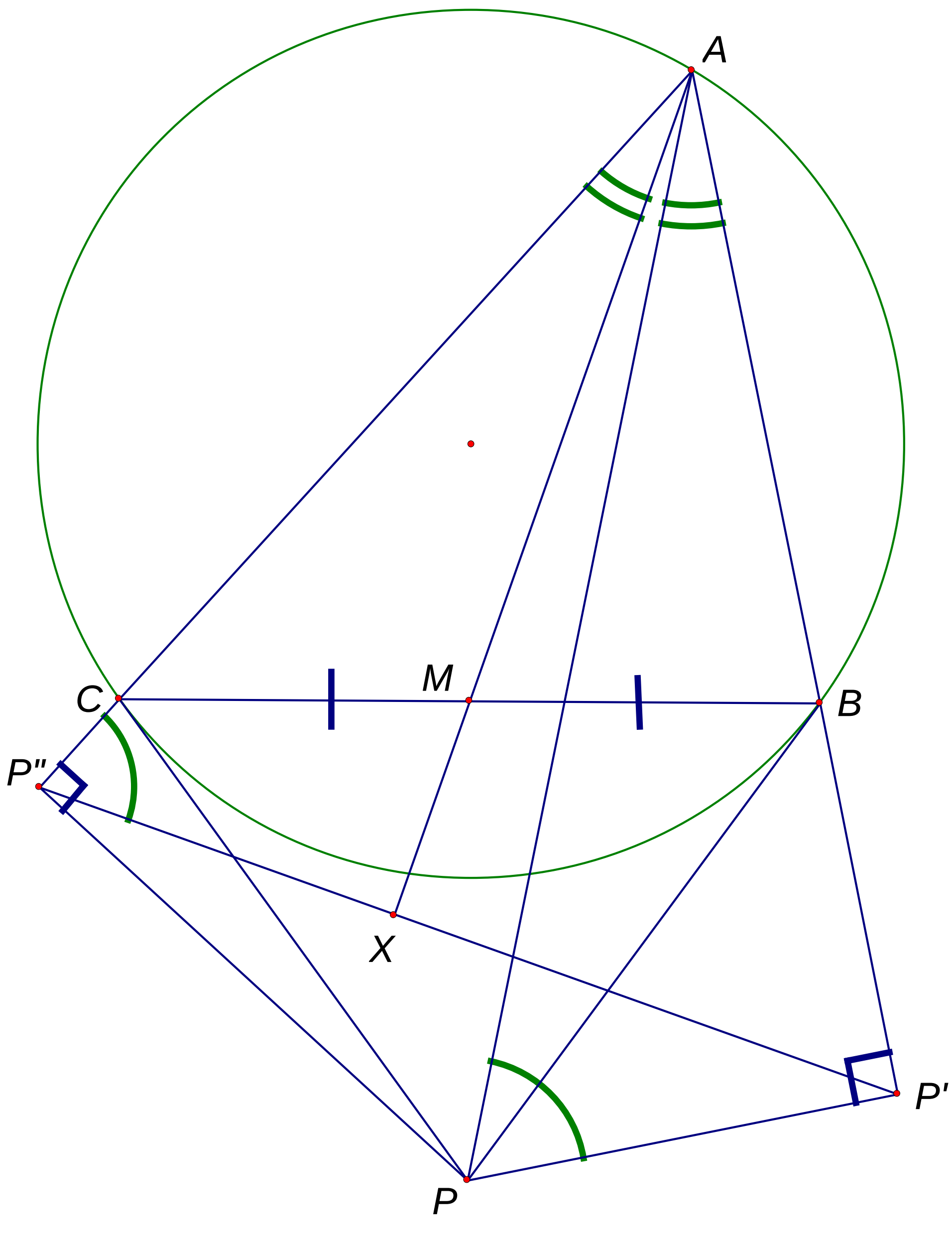
2.2.2 Две окружности пересекаются в точках M и K. Из произвольной точки A первой окружности проводятся прямые AM и AK, повторно пересекающие вторую окружность в точках B и C соответственно. Докажите, что медианы треугольника ABC, проведенные из вершины A, проходят через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки A.



Доказательство:

Заметим, что четырехугольник $BMKC$ вписанный. Из этого следует, что BC антипараллель к MK, поэтому медиана в треугольнике ABC содержит симедиану треугольника AMK (см. **задачу №1.2.1**). Из основной задачи, все симедианы треугольника AMK проходят через P (точку пересечения касательных к первой окружности, проведенных в точках M и K). Точки M и K фиксированы, значит, точка P также фиксирована, то есть все медианы треугольника ABC проходят через P.

2.2.3 Касательные, проведенные в точках B и C, к окружности, описанной около треугольника ABC, пересекаются в точке P. Из P опущены перпендикуляры PP' и PP'' на прямые AB и AC соответственно. Докажите, что прямая, содержащая медиану AM треугольника ABC, перпендикулярна отрезку $P'P''$.



Доказательство:

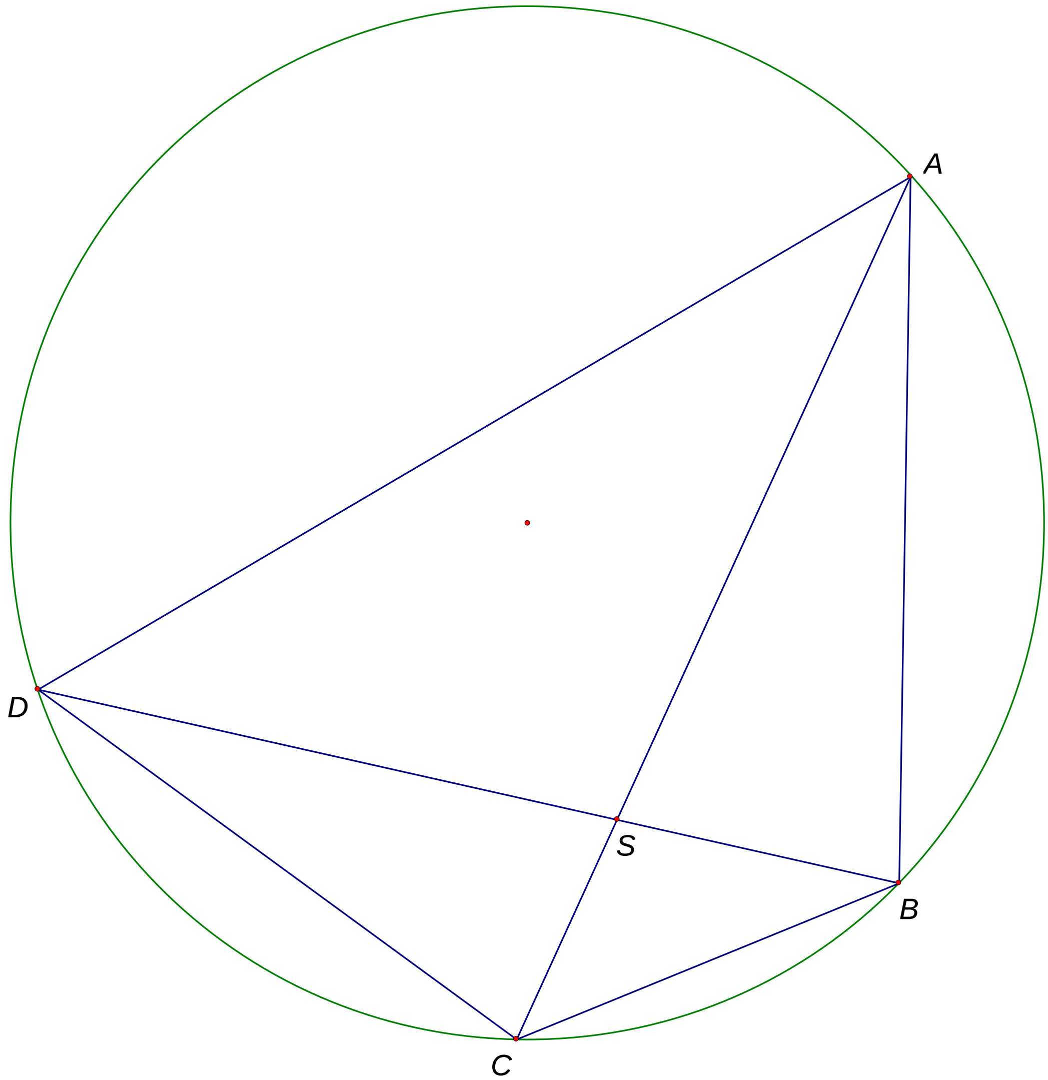
Четырехугольник $AP'PP''$ – вписанный, следовательно $\angle APP' = \angle AP''P'$.

Из основной задачи следует, что AP содержит симедиану треугольника ABC, то есть $\angle P''AX = \angle P'AP$. Таким образом, $\angle P'XA = 180° - \angle XP''A - \angle P''AX = 180° - \angle P'PA - \angle P'AP = 180° - 90° = 90°$.

Часть III. Гармонический четырехугольник

3.1 Определение гармонического четырехугольника

Вписанный в окружность четырехугольник называется гармоническим, если произведения его противоположных сторон равны.



3.2 Связь с симедианой (свойство)

Свойство: диагонали гармонического четырехугольника являются симедианами.

Доказательство:

Докажем, что AS – симедиана в треугольнике ABD. Достаточно доказать, что $\frac{BS}{SD} = \frac{AB^2}{AD^2}$.

Теперь воспользуемся тем, что $\triangle DSC \sim \triangle ASB$, а $\triangle CSB \sim \triangle DSA$:

$\frac{BS}{SD} = \frac{BS \cdot AS}{AS \cdot SD} = \frac{BS}{AS} \cdot \frac{AS}{SD} = \frac{BC}{AD} \cdot \frac{AB}{DC} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{\left(\frac{AB \cdot CD}{AD}\right)}{CD} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AB}{AD}$, что и требовалось.

Аналогично, CS – симедиана в треугольнике BCD, BS – в треугольнике ABC и DS – в треугольнике ADC.

3.3 Задачи

3.3.1 А) Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Известно, что касательные к ω, проведенные в точках B и D, пересекаются на прямой AC или параллельны AC. Докажите, что касательные к ω, проведенные в точках A и C, пересекаются на прямой BD или параллельны BD.

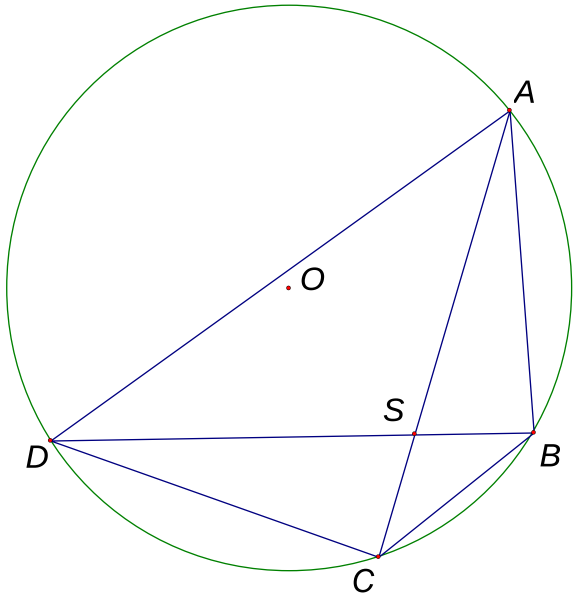


Рис. 1

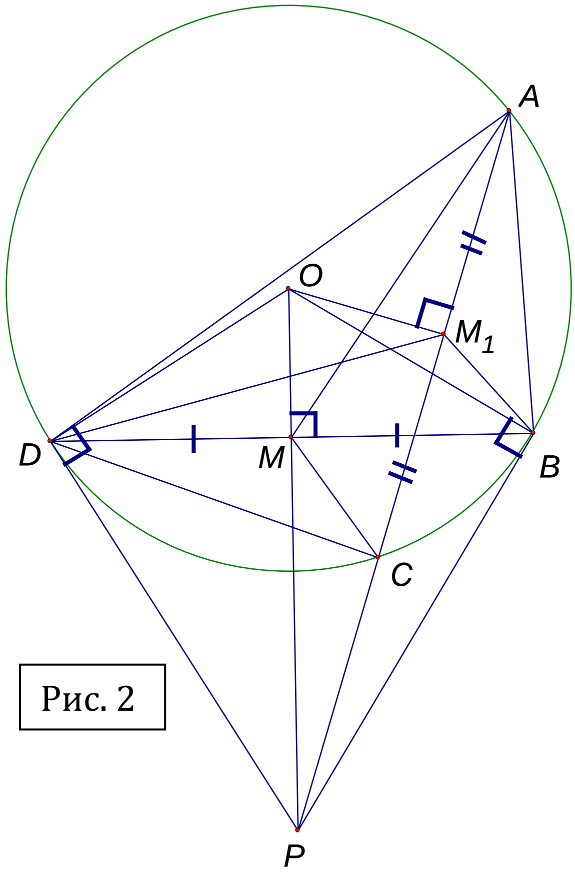


Рис. 2

Доказательство:

Рассмотрим 2 случая:

1) Пусть касательные в точках B и D параллельны, то есть точки B и D диаметрально противоположны. Из этого следует, что, по условию задачи, касательные в точках B и D параллельны прямой AC. Таким образом, точки A и C симметричны относительно диаметра, поэтому прямая BD, являющаяся осью симметрии касательных в этих точках, пройдет через точку их пересечения. Что и требовалось.

2) Пусть касательные к окружности в точках B и D пересекаются в точке P. Докажем, что BD – симедиана в треугольнике CDA (см. **основную задачу**).

1 способ:

Рассмотрим рис.1.

Заметим, что AC – симедиана в треугольниках ADB и DCB. Из второго определения симедианы следует, что $\frac{DC^2}{CB^2} = \frac{DS}{SB} = \frac{AD^2}{AB^2}$, то есть, $AB \cdot CD = BC \cdot DA$, следовательно, четырехугольник $ABCD$ – гармонический. Его диагонали является симедианами (**свойство гармонического четырехугольника**), что и требовалось.

2 способ:

Рассмотрим рис. 2.

1) Пусть M_1 – середина отрезка AC. Проведем OM_1 и DM_1. Достаточно доказать, что $\angle DM_1C = \angle BM_1C$. В таком случае DB будет симедианой треугольника ADC (из **задачи №1.2.1**).

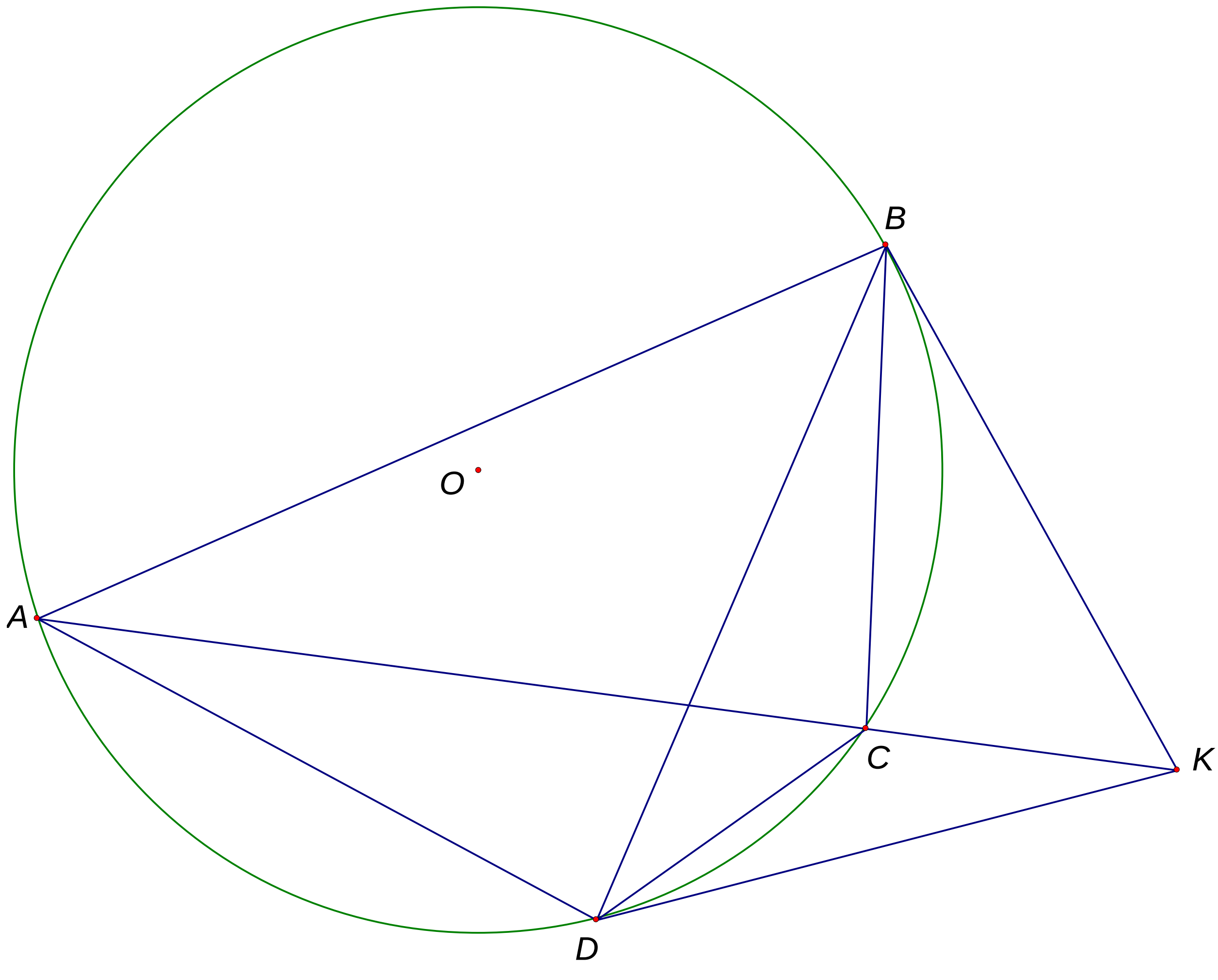
2) Рассмотрим четырехугольник DOM_1P. $\angle ODP = \angle OM_1P = 90°$, следовательно, DOM_1P – вписанный. Значит, $\angle DM_1P = \angle DOP$ (они вписанные, опирающиеся на одну дугу).

3) Рассмотрим четырехугольник OM_1BP. $\angle OBP = \angle OM_1P = 90°$, следовательно, OM_1BP – вписанный. Значит, $\angle BM_1P = \angle BOP$ (они вписанные, опирающиеся на одну дугу).

4) Заметим, что $\angle BOP = \angle DOP$, так как OP или OM – медиана и биссектриса в равнобедренном треугольнике DOB. Следовательно, $\angle DM_1P = \angle DOP = \angle BOP = \angle BM_1P$.

Таким образом, доказана следующая лемма: **если у вписанного четырехугольника одна из диагоналей является симедианой, то он гармонический**.

Б) Касательная в точке B к описанной окружности S треугольника ABC пересекает прямую AC в точке K. Из точки K проведена вторая касательная KD к окружности S. Докажите, что BD содержит симедиану треугольника ABC.

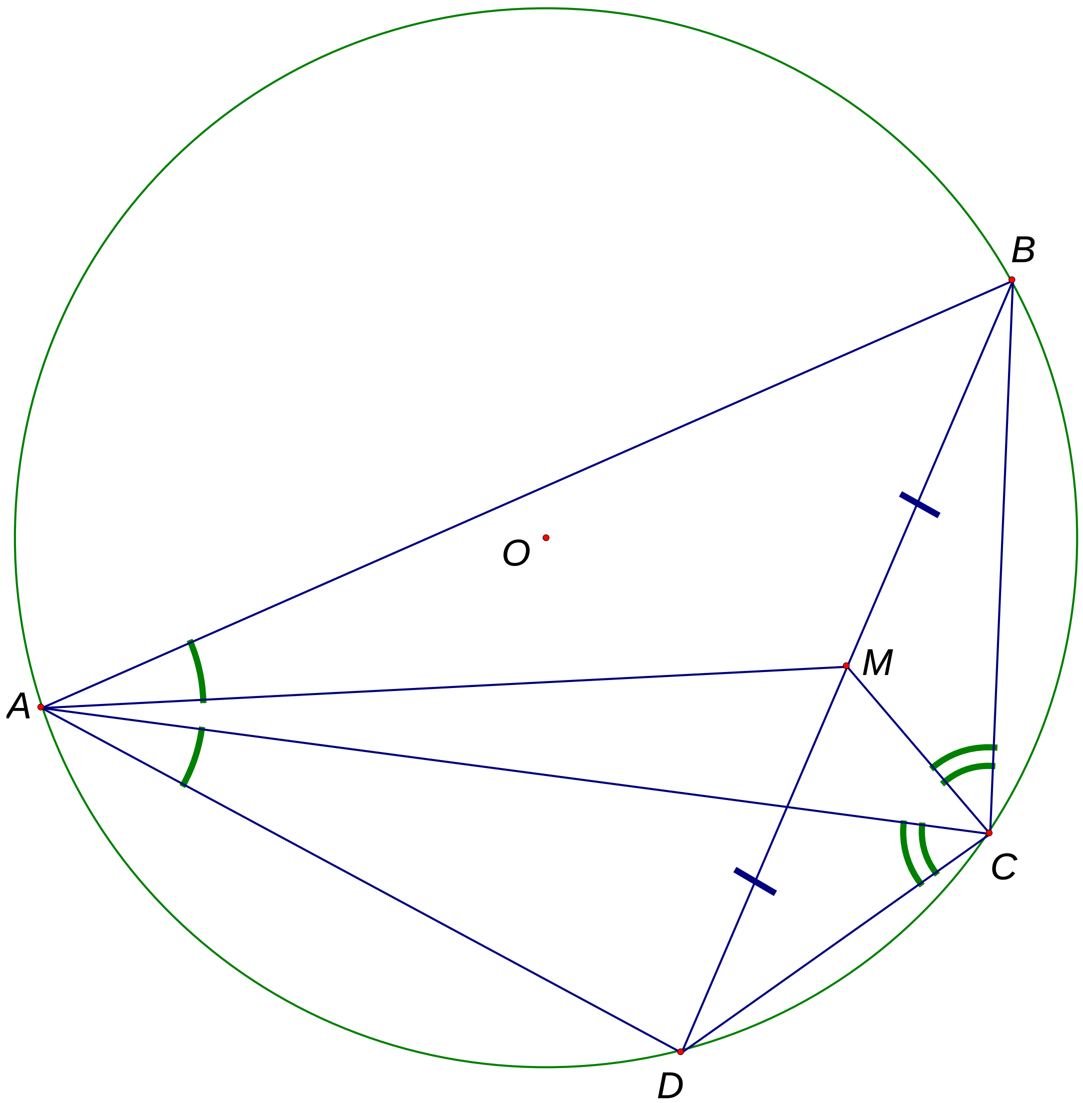


Доказательство:

В четырехугольнике $ABCD$, AC – симедиана треугольника ADB (из **основной задачи**).

Таким образом, по **лемме**, BD – симедиана в треугольнике ABC.

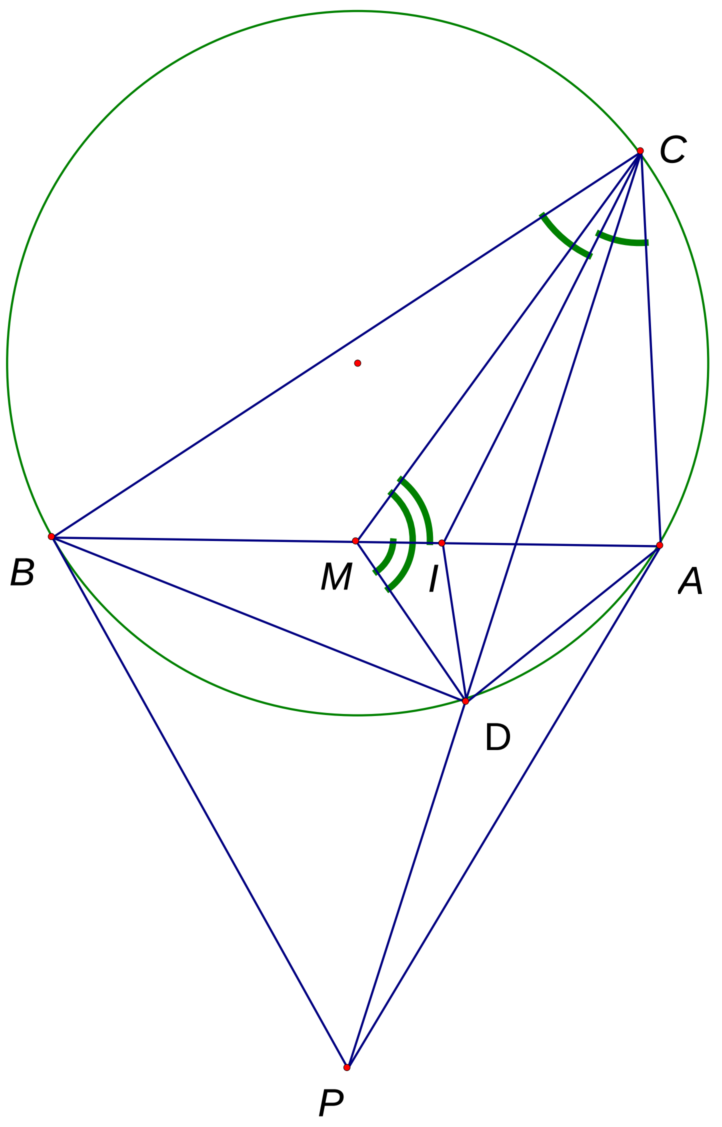
В) ***(Всероссийская олимпиада по геометрии 2008)*** Прямые, симметричные диагонали AC четырехугольника $ABCD$ относительно биссектрис углов A и C, проходят через середину диагонали BD. Докажите, что прямые, симметричные диагонали BD относительно биссектрис углов B и D, проходят через середину диагонали AC.



Доказательство:

Если прямые AM и CM, симметричные AC относительно биссектрис углов, являются медианами, значит AC – симедиана в треугольниках ABD и BCD. Таким образом, задача эквивалентна предыдущей. Значит BD – симедиана в треугольниках ABC и ACD, следовательно прямые, симметричные ей относительно биссектрис углов, будут содержать медианы в треугольниках ABC и ACD, то есть будут пересекать AC в середине.

Г) CI – биссектриса угла BCA треугольника ABC. CD – симедиана треугольника ABC. Точка D – пересечение симедианы с описанной окружностью. Докажите, что DI – биссектриса угла BDA.



Доказательство:

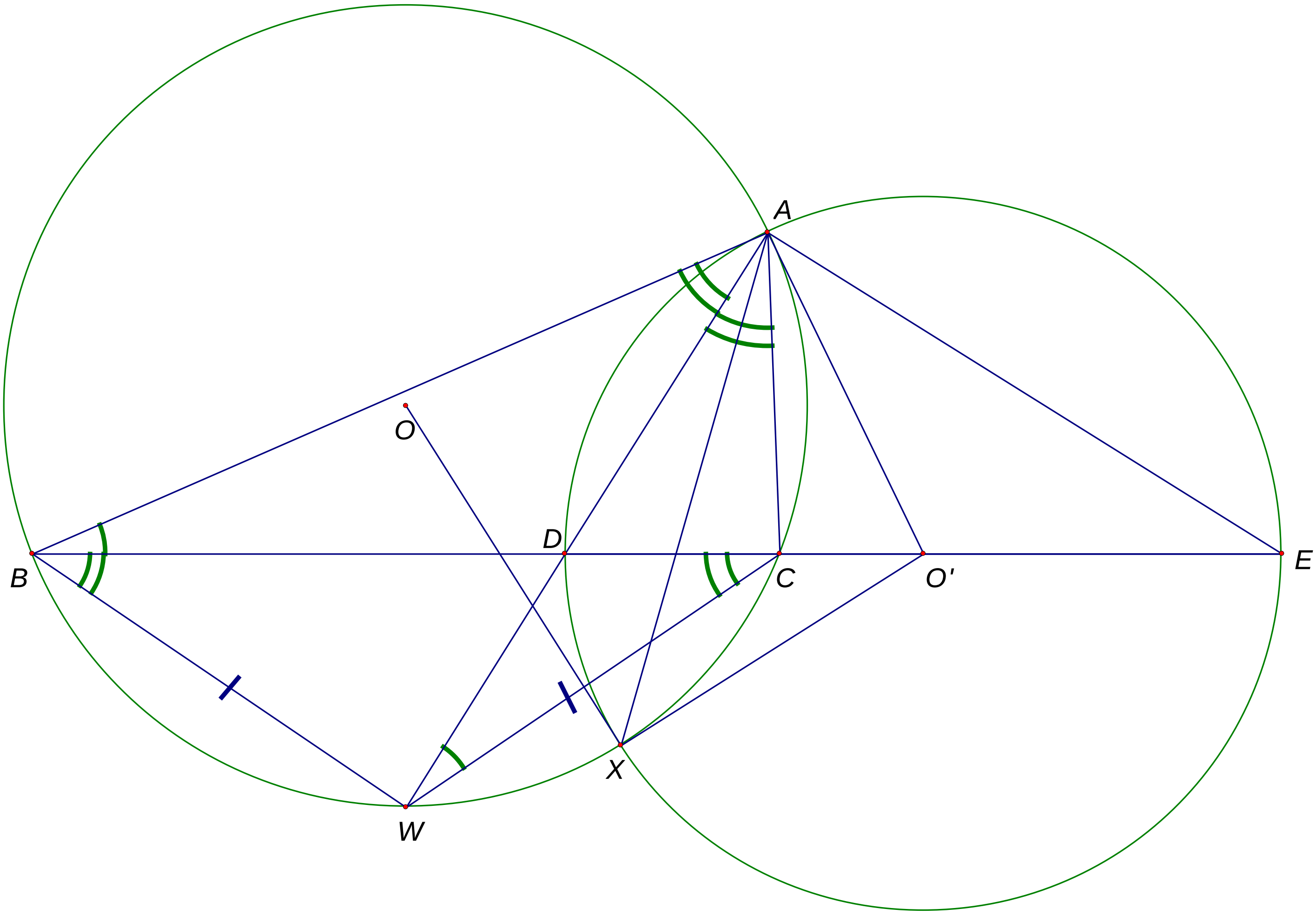
1 способ:

Пусть CM – медиана треугольника, следовательно, CI – биссектриса треугольника CMD. Заметим, что MI – биссектриса угла DMC (из **задачи №2.1.1**). Таким образом, I – инцентр в треугольнике MCD, следовательно, DI – биссектриса угла MDC. Также заметим, что DM – медиана в треугольнике BDA, а DC – симедиана, следовательно, $\angle BDM = \angle CDA$.Таким образом, $\angle BDI = \angle IDA$, что и требовалось.

2 способ:

Заметим, что четырехугольник $ACBD$ – гармонический. Из определения следует, что $AC \cdot BD = BC \cdot DA$, то есть $\frac{BC}{CA} = \frac{BD}{DA}$. Таким образом, биссектрисы противолежащих углов D и C делят диагональ AB в одинаковом отношении, следовательно, пересекаются на этой диагонали.

Д) Биссектрисы внешнего и внутреннего углов при вершине A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках D и E. Окружность с диаметром DE пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках A и X. Докажите, что AX — симедиана треугольника ABC.



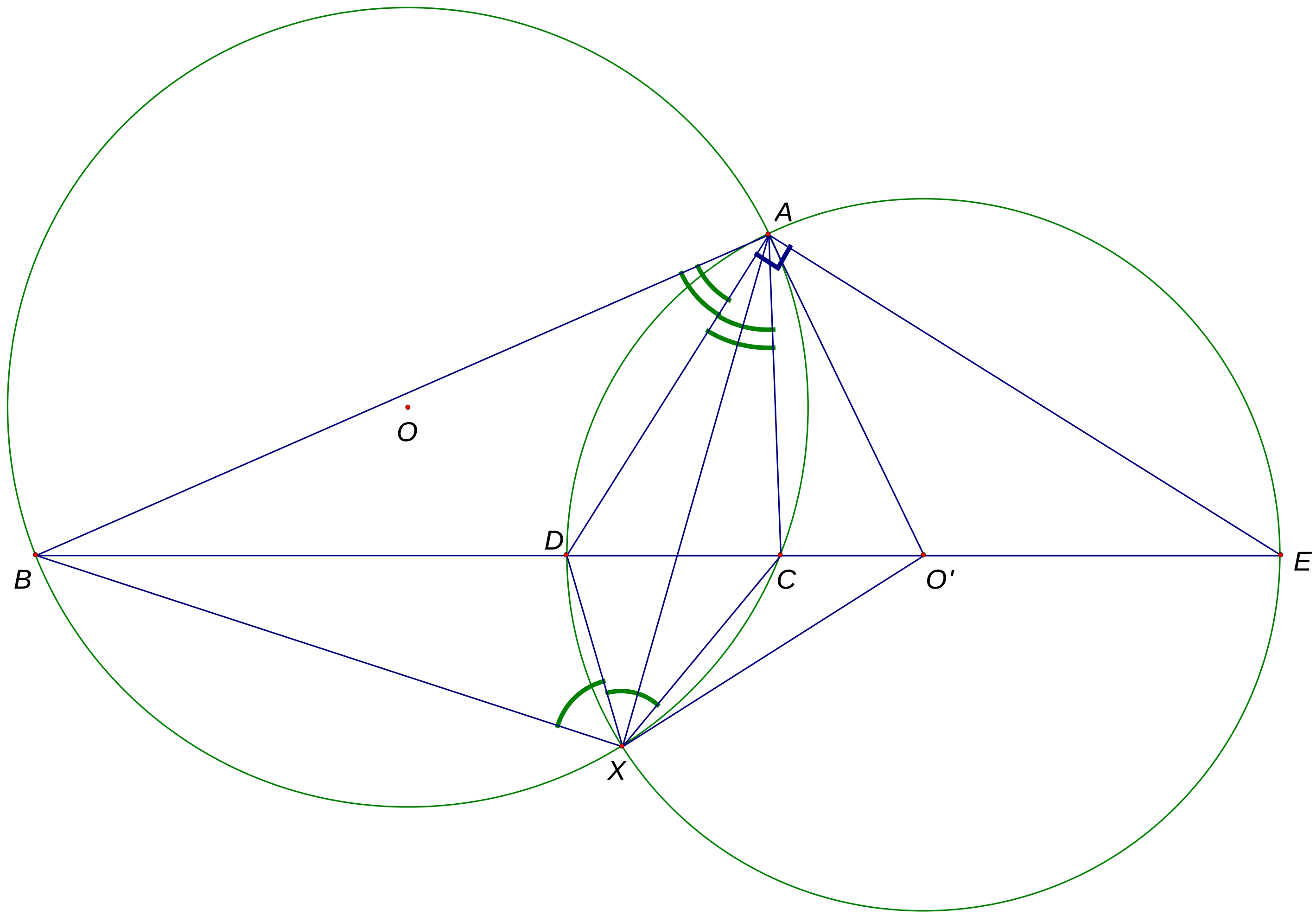
Доказательство:

1 способ:

1) Докажем, что O' – точка пересечения касательных к окружности, описанной около треугольника ABC, проведенных в точках A и X.

Заметим, что $\angle WAC = \angle CBW = \angle BCW$. $\angle ADC = 180° - \angle WDC = \angle DCW + \angle DWC = \angle DAO'$ (Треугольник ADO' – равнобедренный). Таким образом, $\angle CAO' = \angle DAO' - \angle DAC = \angle ADO' - \angle DCW = \angle DWC$. По теореме об угле между касательной и хордой, AO' – касательная к окружности. Поскольку треугольник AXO' – равнобедренный, следовательно, XO' – касательная к окружности, описанной около треугольника ABC. Что и требовалось.

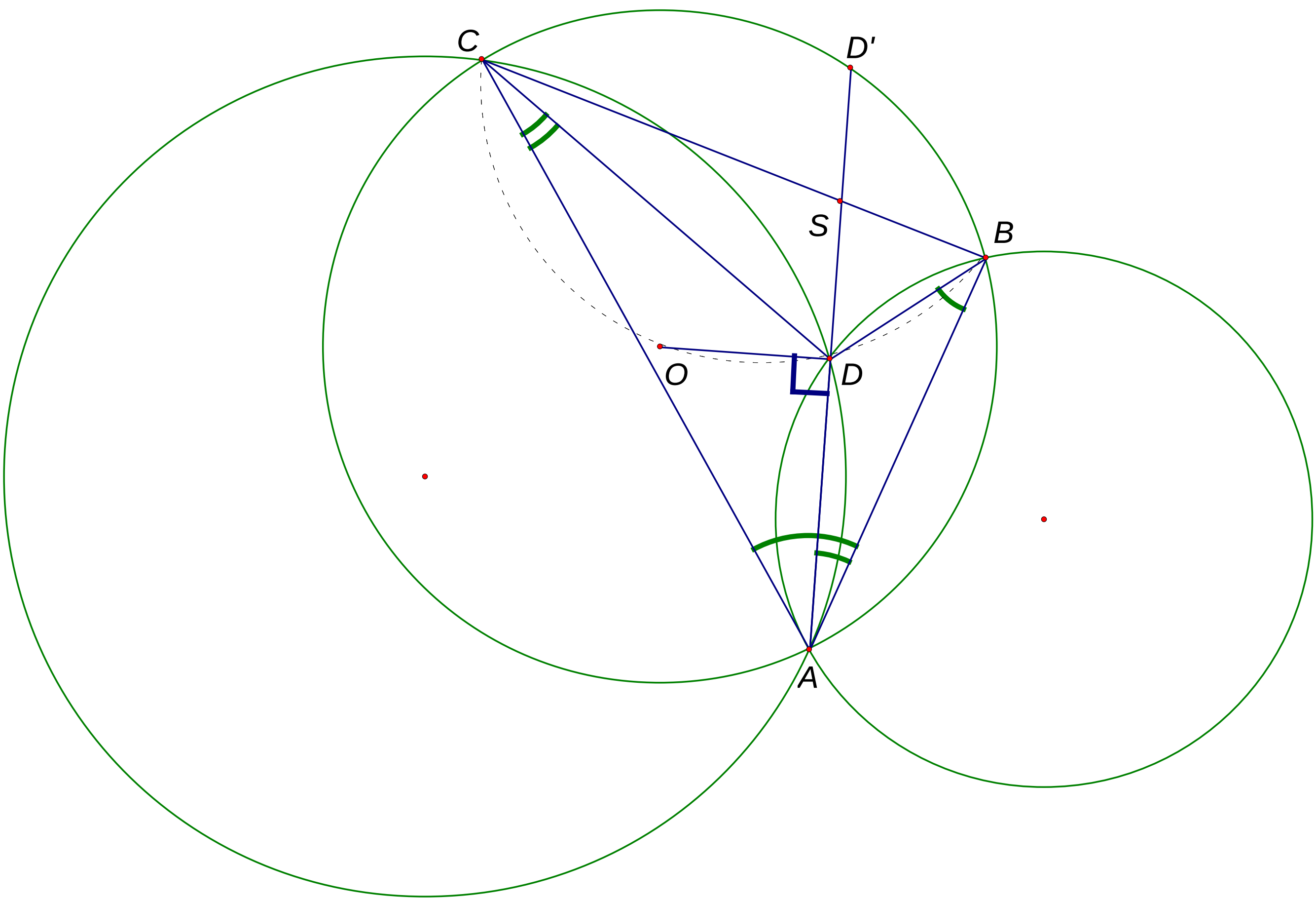
Из этого следует, что вписанный четырехугольник $ABXC$ соответствует конструкции из пункта **А)**. Таким образом, AX – симедиана в треугольнике ABC.



2 способ:

Заметим, что окружность, описанная вокруг треугольника ADE – окружность Аполлония для точек B и C (её диаметр – отрезок с концами в точках пересечения биссектрис внутреннего и внешнего углов BAC и прямой BC). Точка X принадлежит данной окружности, следовательно, $\frac{XC}{XB} = \frac{CD}{BD}$, то есть XD – биссектриса угла BXC. Таким образом, четырехугольник $ABXC$ – гармонический (см. **пункт Г**). Из этого следует, что AX – симедиана в треугольнике ABC.

3.3.2 Окружность S_1 проходит через точки A и B и касается прямой AC, окружность S_2 проходит через точки A и C и касается прямой AB. Докажите, что общая хорда этих окружностей является симедианой треугольника ABC.



Комментарий: *вернемся к задаче **1.4.1(A)**. Заметим, что данную задачу можно решать, используя понятие гармонического четырехугольника.*

Доказательство:

1) Докажем, что если продлить AD до пересечения с окружностью, описанной около треугольника ABC, то $AD = DD'$ (см. рис.).

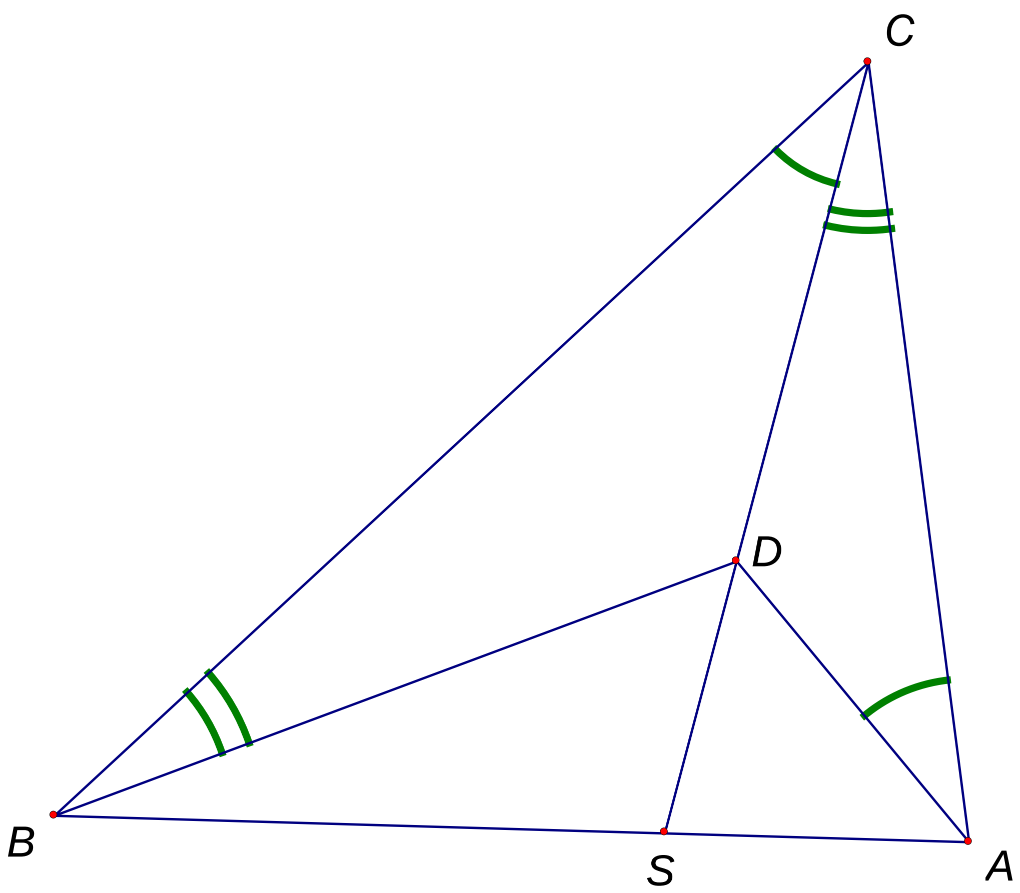
Для этого докажем, что $CODB$ – вписанный. Пусть $\angle CAD = \alpha,$ а $\angle DAB = \beta$, тогда $\angle DBA = \alpha,$ а $\angle DCA = \beta$ (по теореме об угле между касательной и хордой). Тогда $\angle CDB = 360° - \angle CDA - \angle DAB = 360° - (180° - \angle DCA - \angle DAC) - (180° - \angle DBA - \angle DAB) = 2\alpha + 2\beta = 2\angle CAB = \angle COB$ (он центральный для $\angle CAB$), что и требовалось.

Выразим $\angle ODA$: $\angle ODA = 360° - \angle CDO - \angle CDB - \angle ADB = 360° - \angle CBO - \angle CDB - \angle ADB = 360° - (90° - \alpha - \beta) - 2\alpha - 2\beta - (180° - \alpha - \beta) = 90°$. Угол ODA – прямой , значит OD пересекает хорду AD' в середине.

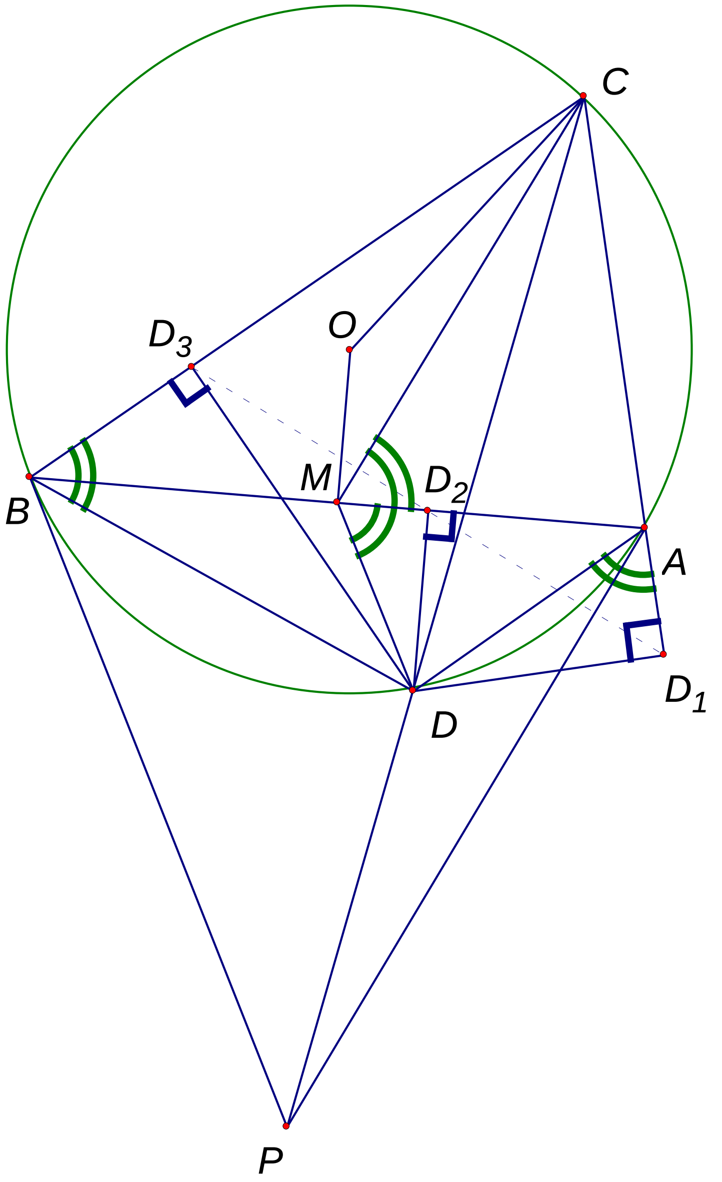
2) Докажем, что CB – симедиана треугольника ACD'. Заметим, что $\angle D'CB = \angle D'AB = \angle DCA$. Из **пункта 1)** следует, что CD – медиана, значит CB, которая ей симметрична, – симедиана.

3) Вписанный четырехугольник $ACD'B$ является гармоническим (по **лемме**), а значит, AD' – симедиана в треугольнике ABC, следовательно, общая хорда двух окружностей является симедианой треугольника ABC, что и требовалось.

Заметим, что было доказано следующее утверждение: **в треугольнике ABC точка D удовлетворяет следующим условиям: $\angle DAC = \angle DCB$, $\angle DBC = \angle DCA$; тогда и только тогда, когда прямая CD содержит симедиану треугольника ABC.**



3.3.3 Докажите, что если из точки D (пересечения симедианы с описанной окружностью треугольника ABC) опустить перпендикуляры DD_1, DD_2 и DD_3 на прямые AC, AB и BC соответственно, то D_2 – середина отрезка D_1D_3.



Доказательство:

1 способ:

Запишем следствие из теоремы синусов для треугольников D_3BD_2 и D_2AD_1: $\dfrac{D_3D_2}{\sin\angle D_3BD_2} = \dfrac{D_3D_2}{\sin\angle CBA} = BD$, а $\dfrac{D_1D_2}{\sin\angle D_2AD_1} = \dfrac{D_1D_2}{\sin\angle CAB} = AD$, то есть: $\dfrac{D_3D_2}{D_1D_2} =$ $= \dfrac{BD\cdot\sin\angle CBA}{AD\cdot\sin\angle CAB} = \dfrac{BC\cdot\sin\angle CBA}{AC\cdot\sin\angle CAB}$ (так как четырехугольник гармонический).

Учитывая теорему синусов для треугольника ABC, получим, что $BC\cdot\sin\angle CBA = AC\cdot\sin\angle CAB$, то есть $D_2D_3 = D_1D_2$.

2 способ:

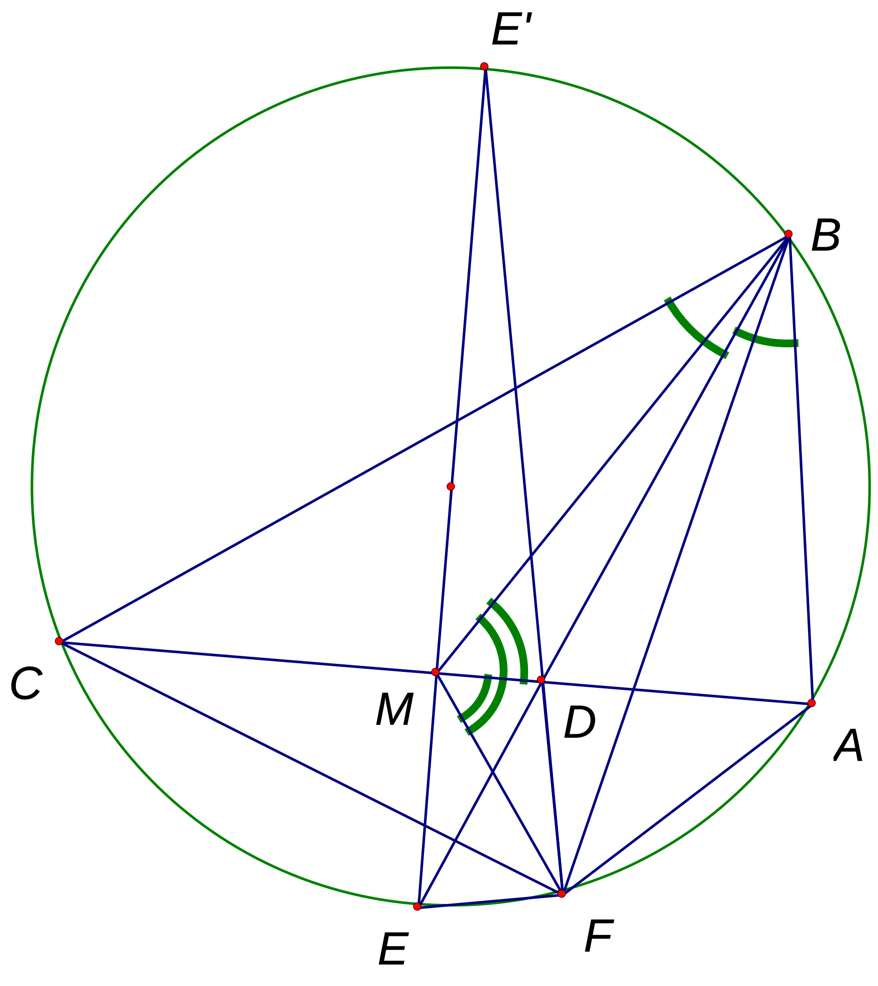
1) Пусть точка M – середина отрезка AB.

2) Докажем, что треугольники BDD_3, MDD_2 и ADD_1 подобны. Пусть $\angle DMD_2 = \alpha$, тогда $\angle DMC = 2\alpha$ (**задача №2.1.1 (А)**), тогда $\angle DOC = \angle DMC = 2\alpha$ (**задача №2.1.1(Б)**), значит $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle DMC = \alpha$ (вписанный и центральный углы). Заметим, что $\angle DAD_1 = 180°– \angle DAC = \angle DBC =$

$\angle DMD_2$. Таким образом, треугольники BDD_3, MDD_2 и ADD_1 – прямоугольные с равными острыми углами, следовательно они подобны.

3) Сделаем поворотную гомотетию с центром D, которая переведет точку A в D_1. Из подобия треугольников, следует, что B перейдет в D_3, а M – в D_2. Так как поворотная гомотетия переводит середину отрезка в середину отрезка, то D_2 – середина D_1D_3.

3.3.4 ***(Всероссийская олимпиада по математике 2009)*** В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.



Доказательство:

Пусть F – точка пересечения симедианы с описанной окружностью. Докажем, что угол EFD – прямой.

Из **задачи №3.3.1 (Д)** известно, что FD – биссектриса угла AFC. Таким образом, если продлить FD до пересечения с окружностью (точкой E'), то E' – середина дуги CA. Заметим, что угол EFE' опирается на диаметр EE', а следовательно, – прямой.

Заключение

Заметим, что использование симедианы, позволяет увидеть, много общего в геометрических конструкциях совершенно разных на первый взгляд задач. Например, 1.4.1(А) и 1.4.1(Б) были придуманы разными людьми в разное время, однако, по сути, являются одной и той же задачей. Кроме того, задача 1.5.1, с точки зрения симедианы, является обобщением 2.1.2.

Дальнейшее изучение свойств симедианы может быть связано с точкой Лемуана (точка пересечения симедиан) или с гармоническим четырехугольником. Отметим, что название гармонический четырехугольник возникло из понятия гармонической четверки точек, то есть точек, двойное отношение которых равно минус единице. Понятие двойного отношения, в свою очередь, связано с проективными преобразованиями плоскости и выходит за рамки данной работы.

Список литературы и web-ресурсов

1. Праслов В. В. «Задачи по планиметрии», МЦНМО, 2006
2. Акопян А. В. «Геометрия в картинках», 2011
3. Problems.ru
4. Geometry.ru
5. Olympiads.mccme.ru/ustn/